GEO1303 – Méthodes sismiques
4 - Déconvolution

Bernard Giroux
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

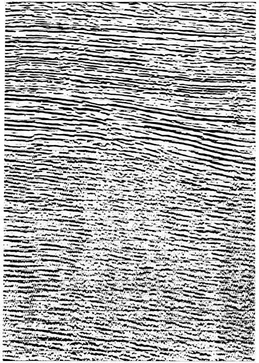
Version 1.1.9
Automne 2020

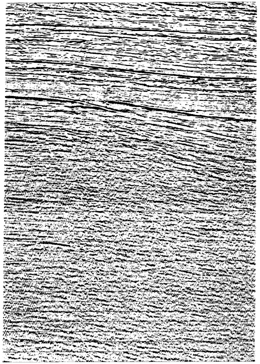
Introduction

Objectif de la déconvolution

- La déconvolution permet de comprimer l'ondelette contenue dans un enregistrement et de réduire les réverbérations et les multiples ;
- La déconvolution augmente donc la résolution temporelle et donne une représentation du modèle de réflectivité.

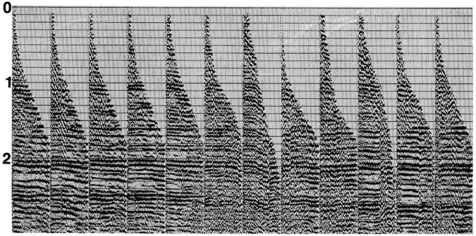
avant



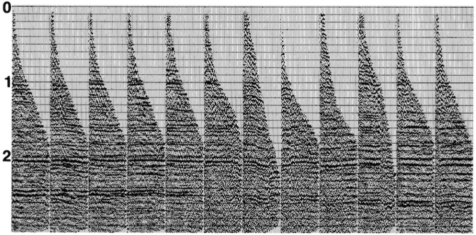


après

Exemple

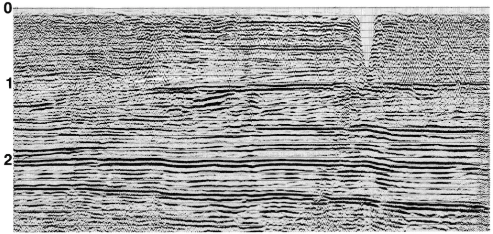


(a)

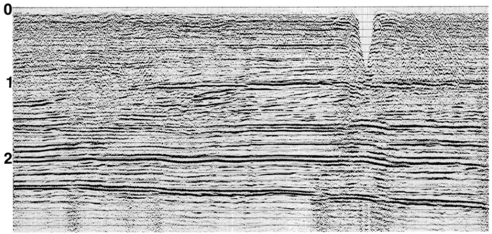


(b)

Exemple



(a)



(b)

Hypothèses sous-jacentes

- Le sous-sol est constitué de couches horizontales de vitesse constante ;
- La source génère une onde P qui se propage verticalement, ce qui implique :
  - incidence normale aux réflecteurs ;
  - pas d'ondes S ;
- L'ondelette source ne change pas de forme en se propageant ($w(t)$ est stationnaire) ;
- La réflectivité est un processus aléatoire.

Modèle convolutif

Le sismograme

On peut considérer un enregistrement sismique $x(t)$ comme la sortie d'une série de filtres linéaires en cascade, chacun considéré invariant dans le temps. Un modèle simple :

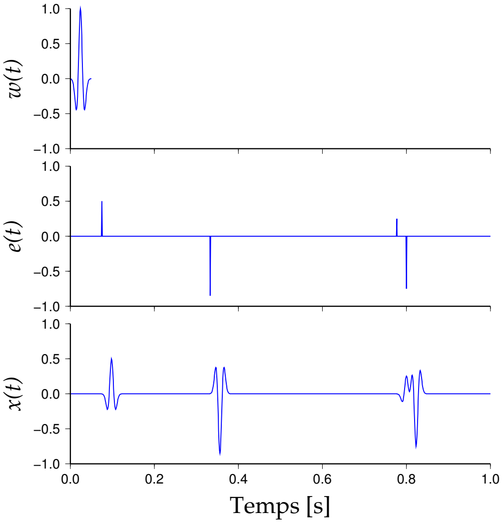
$$x(t) = w(t) * e(t) + n(t), \tag{1}$$

où

- $w(t)$ est l'ondelette sismique ;
- $e(t)$ est la réponse impulsionnelle du sol incluant le modèle de réflectivité et l'atténuation ;
- $*$ est l'opérateur de convolution ;
- $n(t)$ est le bruit.

L'idée générale de la déconvolution est de récupérer $e(t)$.

Le sismograme



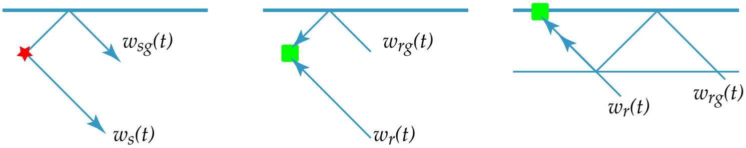
Le sismograme

Notons que l'ondelette sismique peut également être vue comme la sortie d'une série de filtres, qui peuvent varier d'une trace à l'autre :

$$w(t) = w_s(t) * w_{sg}(t) * w_r(t) * w_{rg}(t) * w_i(t), \tag{2}$$

où

- $w_s(t)$ est le signal à la source ;
- $w_{sg}(t)$ est un fantôme de la source (réflexion en surface) ;
- $w_r(t)$ est la réponse du géophone ;
- $w_{rg}(t)$ est un fantôme du géophone ;
- $w_i(t)$ et la réponse du système d'acquisition.



L'opérateur de convolution

Soient deux signaux réels discrets a et b :

- a contient m coefficients ;
- b contient n coefficients ;
- Les coefficients de la convolution $c(t) = a(t) * b(t)$ sont

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{k-j} b_j, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m+n-2. \tag{3}$$

- La convolution est entre autre
  - *commutative* : $a * b = b * a$
  - *associative* : $a * (b * c) = (a * b) * c$
  - *distributive* : $a * (b + c) = a * b + a * c$
- Soient $a = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ et $b = (b_0, b_1)$, que vaut c ?

L’opérateur d’intercorrélation

Soient deux signaux réels discrets a et b :

- a contient m coefficients ;
- b contient n coefficients ;
- Les coefficients de l’intercorrélation $c(t) = a(t) \star b(t)$ sont

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{k+j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m+n-2. \tag{4}$$

- L’intercorrélation *n’est pas commutative* ;
- La relation entre convolution et intercorrélation :

$$a(t) \star b(t) = a(-t) * b(t). \tag{5}$$

Propriétés du sismogramme

- En l'absence de bruit, la transformée de Fourier de l'équation (1) est

$$X(\omega) = W(\omega)E(\omega),$$

où les transformées s'écrivent individuellement

$$\begin{aligned} X(\omega) &= A_x(\omega)\exp[i\phi_x(\omega)] \\ W(\omega) &= A_w(\omega)\exp[i\phi_w(\omega)] \\ E(\omega) &= A_e(\omega)\exp[i\phi_e(\omega)] \end{aligned}$$

et où $A(\omega)$ est le spectre d'amplitude et $\phi(\omega)$ est le spectre de phase.

Propriétés du sismogramme

- En se basant sur l'hypothèse que le modèle de réflectivité est un processus aléatoire, on peut dire que son spectre est plat, i.e.

$$A_e(\omega) = A_0 = \text{constante.}$$

- Nous avons ainsi que le spectre d'amplitude de la trace devient

$$A_x(\omega) = A_0 A_w(\omega).$$

- Par ailleurs, une série temporelle aléatoire est une série non corrélée, i.e. l'autocorrélation de $e(t)$ est

$$r_e(\tau) = 0, \qquad \tau \neq 0$$

et

$$r_e(0) = r_0 = \text{constante.}$$

Institut national de la recherche scientifique

Propriétés du sismogramme

- Or, on peut montrer que
$$r_x = r_w * r_e,$$
ce qui nous donne, dans le cas d'un modèle de réflectivité aléatoire
$$r_x = r_0 r_w.$$
- Ainsi l'autocorrélation d'une trace sismique est simplement l'autocorrélation de l'ondelette source mise à l'échelle par r_0.
- Ceci nous permet d'utiliser r_x à la place de r_w si l'ondelette source est inconnue.

Déconvolution déterministe

Déconvolution déterministe

- Partant du modèle $x(t) = w(t) * e(t) + n(t)$, si
  - on pose que le bruit $n(t)$ est négligeable ;
  - on connaît l'ondelette sismique $w(t)$,

  alors, il y a une seule inconnue au système : $e(t)$, et la solution est dite *déterministe*.
- L'idée est de trouver un filtre $f(t)$ qui « transforme » $w(t)$ en $\delta(t)$ car

$$x(t) = \delta(t) * e(t) \equiv e(t).$$

  - Appliqué sur $w(t)$, le filtre donne $\delta(t)$
  - Appliqué sur $x(t)$, le filtre donne $e(t)$
- Si $w(t)$ n'est pas connu (le cas le plus fréquent), la solution est dite *statistique*.

Déconvolution déterministe

- Définissons le filtre $f(t)$ tel que

$$e(t) = f(t) * x(t), \tag{6}$$

et insérons (6) dans (1) :

$$x(t) = w(t) * f(t) * x(t).$$

- En éliminant $x(t)$ (qui est un processus aléatoire), on trouve

$$\delta(t) = w(t) * f(t) \longleftrightarrow f(t) = \delta(t) * \frac{1}{w(t)}, \tag{7}$$

où $\delta(t)$ est la fonction Kronecker.

- On appelle $f(t)$ le filtre *inverse*, car il est l'inverse de l'ondelette source.

Déconvolution déterministe

Pour trouver $f(t)$, on peut travailler avec la transformée en Z.

- Soit une ondelette à deux coefficients $w(t)$: $(1, -\frac{1}{2})$. La T.Z. de cette ondelette est

$$W(z) = 1 - \frac{1}{2}z.$$

- Grâce aux propriétés de la T.Z., on a

$$F(z) = \frac{1}{W(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \cdots$$

- Le filtre $f(t)$ a un nombre infini de coefficients *qui décroissent rapidement* : on peut tronquer la série.
  - En ne gardant que $(1, \frac{1}{2})$, la sortie du filtre est $(1, 0, -\frac{1}{4})$, ce qui est assez proche de $\delta(t)$, exprimé comme $(1, 0, 0)$;
  - Avec $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, la sortie du filtre est $(1, 0, 0, -\frac{1}{8})$, ce qui est encore plus précis.

Déconvolution déterministe

- Si les coefficients de l'ondelette sont $w(t)$: $(-\frac{1}{2}, 1)$, la T.Z. de son inverse est

$$F(z) = \frac{1}{W(z)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + z} = -2 - 4z - 8z^2 + \cdots$$

- En tronquant cette série, la solution se détériore car *les coefficients augmentent en fonction de* t.
- En ne gardant que $(-2, -4)$, la sortie du filtre est $(1, 0, -4)$, ce qui s'éloigne de la sortie désirée.
- Avec trois coefficients $(-2, -4, -8)$, on obtient $(1, 0, 0, -8)$, ce qui n'est pas mieux.

Filtre inverse par moindres carrés

Problème : étant donnée une ondelette $w(t) : (1, -\frac{1}{2})$, trouver un filtre $f(t) : (a, b)$ tel que l'erreur entre sa sortie et le signal désiré $(1, 0, 0)$ est minimum au sens des moindres carrés.

- En convoluant $w(t)$ avec $f(t)$, on obtient $(a, b - \frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$;
- L'erreur est $(a, b - \frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) - (1, 0, 0)$;
- La somme des erreurs au carré est

$$L = (a-1)^2 + \left(b - \frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{b}{2} - 0\right)^2$$

- Pour trouver les coefficients : on pose $\frac{\partial L}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial b} = 0$, et on a un système à 2 équations ;
- On trouve $a = 0.95$ et $b = 0.38$, ce qui donne un signal de sortie $(0.95, -0.09, -0.19)$, avec une erreur de 0.048.

Filtre inverse par moindres carrés

Si l'ondelette $w(t)$ a pour coefficients $(-\frac{1}{2}, 1)$

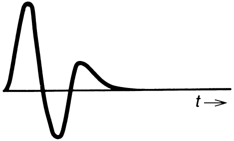
- Les coefficients du filtre sont $(-0.95, -0.19)$;
- La sortie est $(0.24, -0.38, -0.19)$;
- L'erreur vaut 0.762 !

Observation déduite de l'étude de plusieurs signaux :

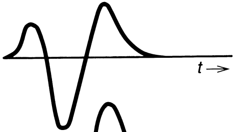
- L'erreur réduit si la sortie désirée a une distribution d'énergie similaire au signal d'entrée ;
- La solution est stable si l'ondelette est de type phase minimale.

Types d'ondelettes

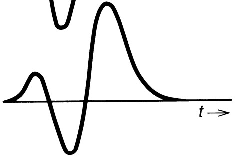
- phase minimale



- phase mixte



- phase maximale



Les trois ondelettes ont le même spectre d'amplitude et la même autocorrélation.

Déconvolution statistique

Filtre de Wiener - Définition

- Le filtre de Wiener permet de convertir un signal d'entrée en un signal de sortie ayant une forme choisie ;
- Soit le signal de sortie voulu $d(t)$, et $y(t) = f(t) * x(t)$ le signal de sortie effectif, le filtre $f(t)$ est obtenu en minimisant l'erreur

$$L = \sum_t (d_t - y_t)^2,$$

i.e. le filtre est optimal au sens des moindres-carrés.

- La procédure consiste à calculer

$$\frac{\partial L}{\partial f_i} = 0, \qquad t = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$$

en utilisant

$$L = \sum_t \left(d_t - \sum_\tau f(\tau) x(t-\tau) \right)^2.$$

Filtre de Wiener - Définition

Le filtre de Wiener a de longueur n est obtenu en solutionnant

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdots & r_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \cdots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

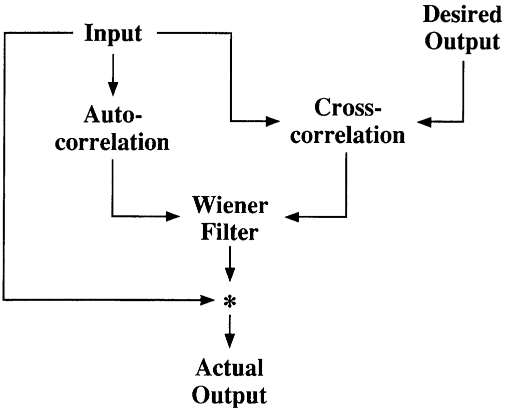
- les coefficients r_i sont l'*autocorrélation* de l'ondelette $w(t)$;
- les coefficients g_i sont l'*intercorrélation* entre la sortie désirée et l'ondelette $w(t)$.

Notes :

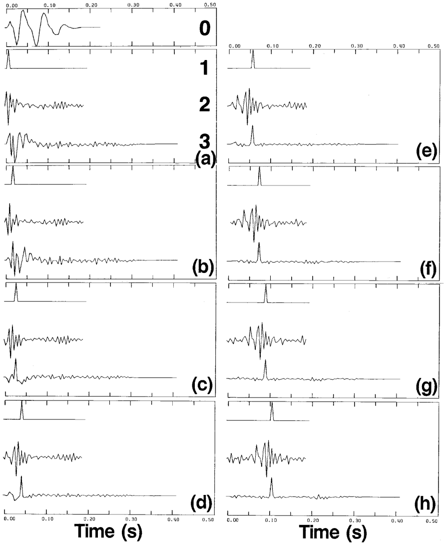
- La matrice d'autocorrélation est symétrique (matrice de Toeplitz, solution rapide);
- On ajoute un bruit blanc pour stabiliser la solution (diagonale multipliée par $\beta = 1 + \epsilon$, ϵ étant le bruit);

Filtre de Wiener

- Si la sortie désirée est $(1, 0, \dots, 0)$, il est équivalent au filtre inverse ;
- La sortie désirée peut avoir une forme arbitraire.



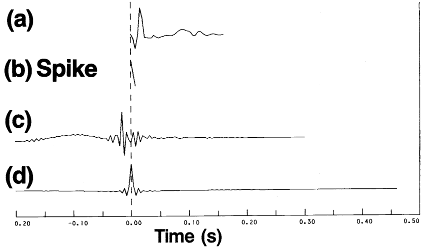
Filtre de Wiener

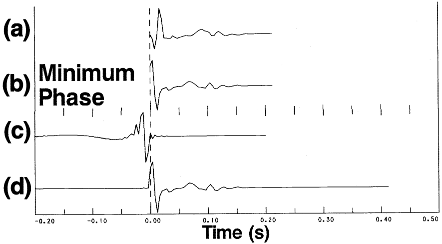


0 : Signal (phase mixte)
1 : Sortie désirée
2 : Filtre
3 : Sortie réelle

Si le signal désiré est phase minimum ((a) et (b)), le filtre performe mal.

Filtre de Wiener





Shaping filter
(a) Ondelette mesurée
(b) Sortie désirée
(c) Filtre
(d) Sortie réelle

On peut transformer nos signaux pour leur donner une forme souhaitée.

Spiking Deconvolution

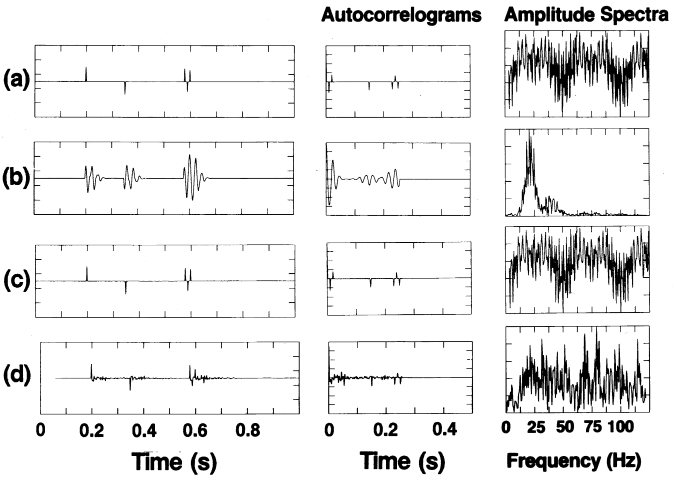
Lorsque l'ondelette source $w(t)$ n'est pas connue :

- Partant de l'hypothèse de la nature aléatoire de la réflectivité, l'*autocorélation de $w(t)$ est égale à l'autocorrélation de la trace $x(t)$* ;
- On construit alors la matrice d'autocorrélation à partir du signal mesuré $x(t)$;
- Le signal de sortie désiré étant $(1, 0, 0, \dots, 0)$, le vecteur g vaut alors $(x_0, 0, 0, \dots, 0)$;
- Le système (8) est mis à l'échelle par $1/x_0$ et solutionné.

Spiking Deconvolution

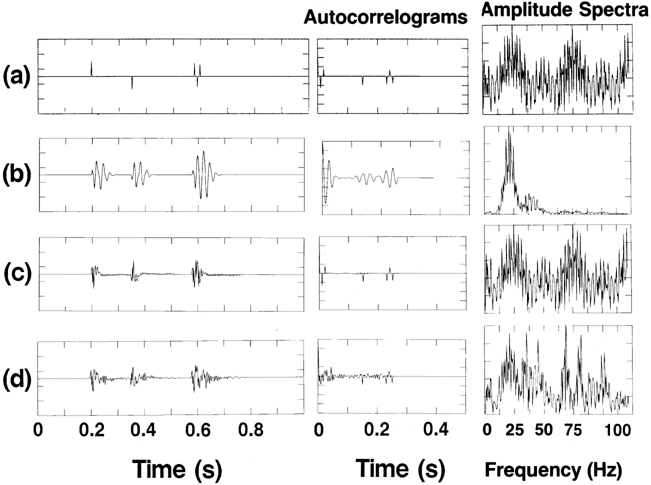
- Introduction
- Modèle convolutif
- Déconvolution déterministe
- Déconvolution statistique
  - Filtre de Wiener
  - Spiking Deconvolution
  - Déconvolution Prédictive
  - Domaine des fréquences
- Applications
- Considérations pratiques

Déterministe (c) vs statistique (d) - phase minimale



Spiking Deconvolution

Déterministe (c) vs statistique (d) - phase mixte



Déconvolution Prédictive

- Il est possible de choisir les coefficients du vecteur g pour prédire la trace à un temps ultérieur, $x(t+\alpha)$, à partir de l'information connue ;
- La fonction d'intercorrélation g devient

$$g_\tau = \sum_t d_t x_{t-\tau} = \sum_t x_{t+\alpha} x_{t-\tau} = \sum_t x_t x_{t-(\alpha-\tau)} = r_{\alpha+\tau}.$$

- Si le filtre est de longueur n et le délai α, le système devient

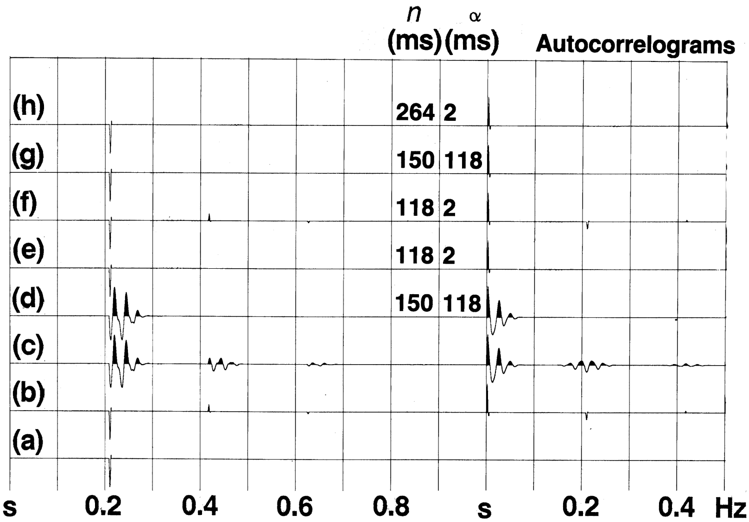
$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdots & r_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \cdots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_{\alpha+1} \\ r_{\alpha+2} \\ \vdots \\ r_{\alpha+n-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

- Note : puisque $\alpha + n - 1 > n$, on doit ajouter des 0 au vecteur $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ pour calculer les coefficients de droite.

Déconvolution Prédictive

- L'effet du filtre est de supprimer (réduire) les multiples survenant après α ;
- La longueur du filtre n doit être assez longue pour contenir la première ondelette.

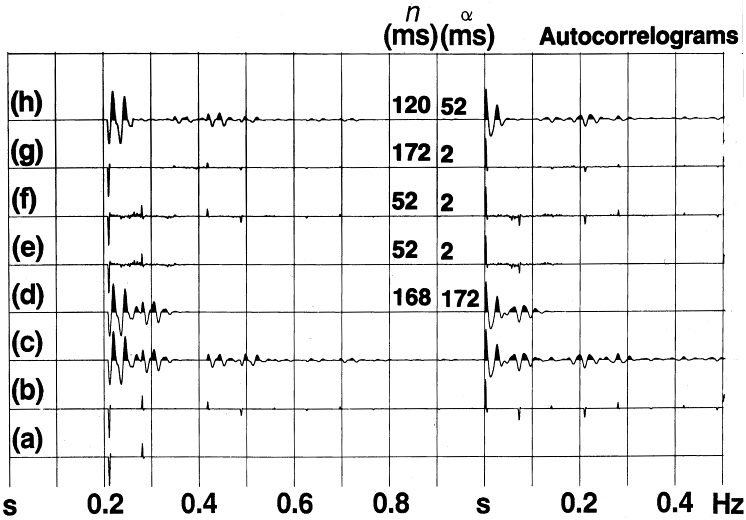
Déconvolution Prédictive



Déconvolution Prédictive

a. Modèle de réflectivité ;
b. Réponse impulsionnelle (incluant multiples) ;
c. Sismogramme incluant les multiples ;
d. Déconvolution prédictive de (c) ;
e. *Spiking deconvolution* de (d) ;
f. *Spiking deconvolution* de (c) ;
g. Déconvolution prédictive de (f) ;
h. Déconvolution prédictive & *spiking* combinées (appliquées sur (c)).

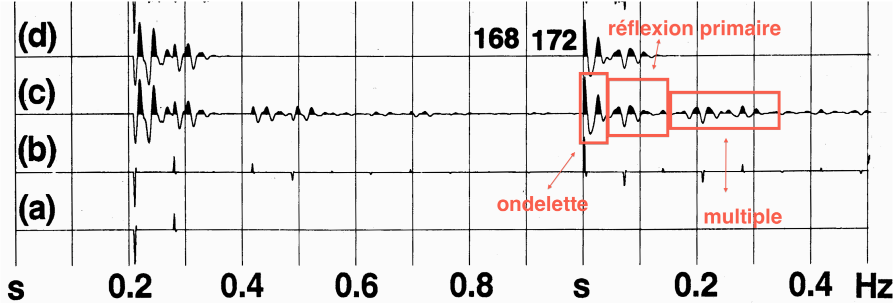
Déconvolution Prédictive



Déconvolution Prédictive

a. Modèle de réflectivité ;
b. Réponse impulsionnelle (incluant multiples) ;
c. Sismogramme incluant les multiples ;
d. Déconvolution prédictive de (c) ;
e. *Spiking deconvolution* de (d) ;
f. Déconvolution de (c) avec $n = 52$ et $\alpha = 2$;
g. Déconvolution de (c) avec $n = 172$ et $\alpha = 2$;
   - n est trop élevé : la réflexion primaire à 0.28 s est éliminée !
h. Déconvolution de (c) avec $n = 120$ et $\alpha = 52$;

Déconvolution Prédictive



- Le délai (α) doit être assez long pour dépasser l'ondelette et les réflexion primaires ;
- Le filtre (n) doit inclure l'ondelette et les réflexion primaires.
- L'opérateur ($n + \alpha$) doit inclure l'ondelette et les réflexions primaires ainsi que les 1^{er} multiples.

Déconvolution dans le domaine des fréquences

- Dans le domaine des fréquences, l'équation (7) est

$$F(\omega) = \frac{1}{W(\omega)}. \tag{10}$$

- Or, $W(\omega)$ est inconnu.
- Partant de l'autocorrélation de $x(t)$, on a

$$R_w(\omega) = W(\omega)\overline{W}(\omega) \equiv X(\omega)\overline{X}(\omega), \tag{11}$$

avec $\overline{X}(\omega)$ le conjugué complexe de la T.F. de $x(t)$.
- Introduisons
  - $U(\omega) = \ln[R_w(\omega)]$,
  - et $\phi(\omega)$ qui est pour l'instant indéterminé.

Déconvolution dans le domaine des fréquences

- Sachant que $R_w(\omega) = \exp[U(\omega)]$, on peut écrire

$$R_w(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2}[U(\omega) + i\phi(\omega)]\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}[U(\omega) - i\phi(\omega)]\right\}. \tag{12}$$

- En comparant (11) et (12), on voit que

$$W(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2}[U(\omega) + i\phi(\omega)]\right\}. \tag{13}$$

- On connaît $U(\omega)$, et on peut montrer que $\phi(\omega)$ est obtenu par la transformée de Hilbert de $U(\omega)$ (pour $u(t)$ rendu causal).
- $W(\omega)$ peut être écrit en termes d'amplitude et de phase

$$W(\omega) = A(\omega)\exp[i\phi(\omega)].$$

Déconvolution dans le domaine des fréquences

- Le filtre $F(\omega) = A_f(\omega)\exp[i\phi_f(\omega)]$ est
  - $A_f(\omega) = \frac{1}{A(\omega)}$;
  - $\phi_f(\omega) = \phi(\omega)$.
- On stabilise le filtre (au détriment de la résolution) en ajoutant un bruit ϵ au spectre d'amplitude

$$A_f(\omega) = \frac{1}{A(\omega) + \epsilon}.$$

$x(t)$

$\downarrow$

$x(t) \star x(t)$

$\downarrow$

transformée de Fourier -> $R_w(\omega)$

$\downarrow$

on prend le log -> $U(\omega)$

$\downarrow$

transformée inverse de Fourier

$\downarrow$

transformée de Hilbert

$\downarrow$

transformée de Fourier -> $U^+(\omega)$

$\downarrow$

on prend l'exponentielle -> $W(\omega)$

$\downarrow$

on prend l'inverse -> $F(\omega)$

$\downarrow$

transformée inverse de Fourier -> $f(t)$

Applications

Corrélation vibrosismique

- Lorsque la source est un camion vibro, le signal source n'est pas une impulsion mais un balayage (*sweep*) :

$$s(t) = A(t)\sin\left(2\pi t(f_0 + \frac{df}{dt}t) + \theta_0\right), \tag{14}$$

où df/dt =cte dans le cas d'un *sweep* linéaire.
- Le balayage est généralement long (8–18 s).
- On pourrait appliquer la déconvolution (déterministe), mais pour des raisons historiques, → corrélation vibrosismique.

Corrélation vibrosismique

Le modèle convolutif est le suivant :

$$x(t) = s(t) * w(t) * e(t); \tag{15}$$

où

- $x(t)$ est le signal mesuré ;
- $s(t)$ est le *sweep* ;
- $w(t)$ représente ici l'effet de la propagation (atténuation) et la réponse instrumentale ;
- $e(t)$ est le modèle de réflectivité.

Corrélation vibrosismique

En intercorrélant le signal mesuré avec le *sweep*, on a

$$x(t) \star s(t) = [s(t) * w(t) * e(t)] \star s(t),$$

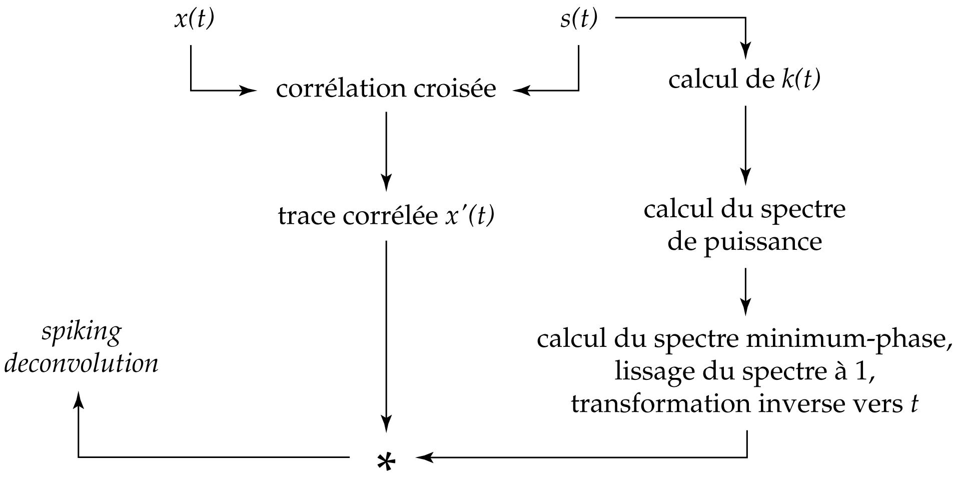
ou bien

$$x'(t) = k(t) * w(t) * e(t)$$

avec

- $k(t)$ l'autocorrélation de $s(t)$;
- $x'(t)$ nommé la «trace corrélée».
- $k(t)$ est de phase nulle, mais $k(t) * w(t)$ est de phase mixte, alors *spiking deconvolution* sur $x'(t)$ n'est pas stable ;
- Deux possibilités :
  - appliquer un filtre inverse de phase nulle pour éliminer $k(t)$;
  - rendre $k(t)$ phase minimale.
- Malgré tout, on obtient généralement des résultats satisfaisants en déconvoluant $x'(t)$ directement.

Corrélation vibrosismique



Corrélation vibrosismique

Introduction

Modèle convolutif

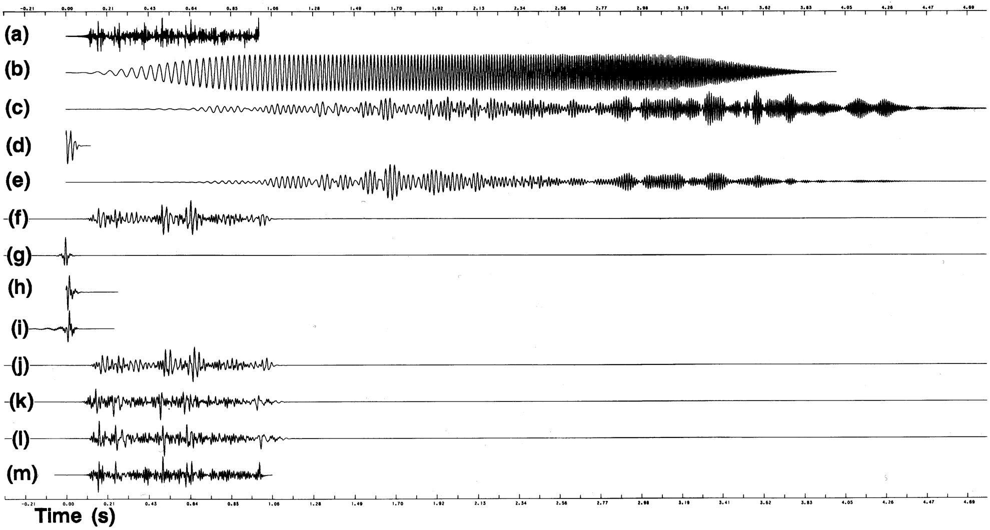
Déconvolution déterministe

Déconvolution statistique

Applications

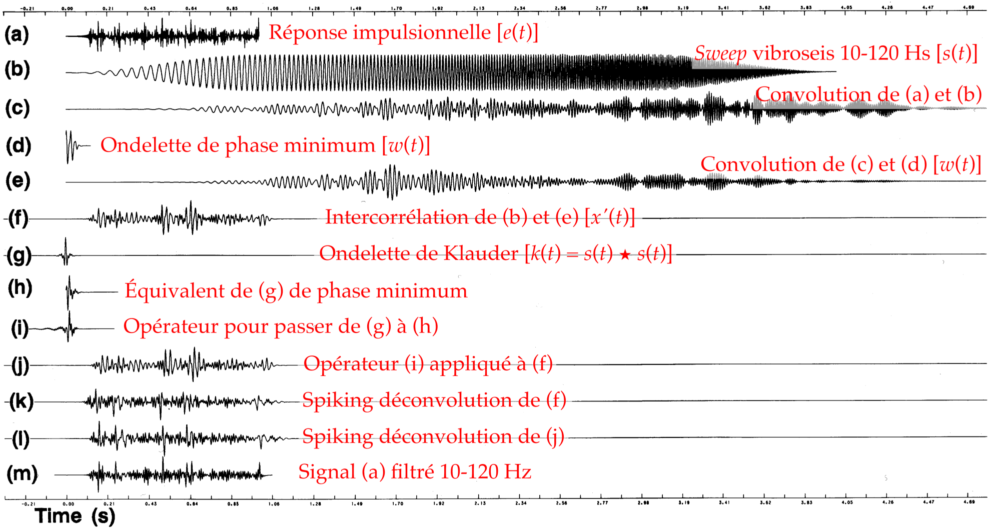
Corrélation vibrosismique

Considérations pratiques



Institut national de la recherche scientifique

Corrélation vibrosismique



Institut national de la recherche scientifique

Considérations pratiques

Considérations pratiques

- En réalité, $w(t)$ n'est pas stationnaire en raison de l'atténuation intrinsèque.
- On peut
  - appliquer *inverse Q filtering* ;
  - appliquer la déconvolution avec opérateur variable dans le temps ;
  - blanchir le spectre avec des gains spécifiques appliqués sur des bandes de fréquences données (*time-variant spectral whitening*).

Considérations pratiques

- Une stratégie générale
  - corriger la divergence géométrique ;
  - appliquer *inverse Q filtering* ou un gain exponentiel ;
  - facultatif : corriger l'ondelette de Klauder pour les données vibroseis ;
  - appliquer la déconvolution prédictive & *spiking* avant sommation pour comprimer l'ondelette et atténuer les réverbérations et multiples de courte période ;
  - appliquer la déconvolution prédictive après sommation pour éliminer les multiples qui subsistent ;
  - blanchir le spectre.
- En général, on cherche à donner l'avantage aux approches déterministes (*inverse Q filtering*, correction de l'ondelette de Klauder) si possible.