GEO1303 – Méthodes sismiques
1 - Les ondes sismiques

Bernard Giroux
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.0.14
Automne 2020

Introduction

Généralités

- Les méthodes sismiques sont des techniques d'imagerie basées sur la mesure de la propagation des ondes sismiques.
- Les ondes sismiques sont de nature mécanique.
- On peut dire d'une onde que
  - c'est une *perturbation* du milieu qui se propage dans l'*espace* et le *temps* ;
  - sa propagation est fonction des propriétés physiques du milieu.
- On peut décrire le phénomène de la propagation des ondes sismiques à partir de
  - la loi de Hooke : reliant contrainte et déformation ;
  - la 2^e loi de Newton : reliant force et accélération.

Caractéristiques élastiques des solides

- Les relations entre contrainte et déformation pour un matériau permettent de décrire les propriétés élastiques de ce matériau, ainsi que les caractéristiques (tel que la vitesse) des ondes qui s'y propagent.
- Définitions :

  contrainte τ : force par unité de surface (F / A) en N / m^2 ;

  déformation ϵ : déformation unitaire $\frac{\Delta L}{l}$ ou $\frac{\Delta V}{V}$.
- À l'*intérieur des limites d'élasticité*, la contrainte est proportionnelle à la déformation (loi de Hooke).

Définitions

Définitions

Module d'Young ou module d'élasticité (E)

$$E = \frac{F/A}{\Delta l/l} = \frac{\text{contrainte uniaxiale}}{\text{déformation parallèle à la contrainte}}$$

avec $F/A = P$.

Module d'élasticité volumique, ou *bulk modulus* (K)

Une contrainte hydrostatique P dans les trois axes orthogonaux entraîne une changement de volume ΔV.

$$K = \frac{\text{contrainte volumique}}{\text{déformation volumique}} = \frac{F/A}{\Delta V/V} = \frac{P}{\Delta V/V}$$

$1/K$ est appelé compressibilité.

Définitions

Module (d'élasticité) de cisaillement ou rigidité (μ)

Mesure du rapport contrainte / déformation dans le cas d'un cisaillement simple tangentiel. Déformation sans changement de volume.

$$\mu = \frac{P}{\Delta l / l} = \frac{P}{\phi};$$

ϕ est l'angle de déformation.

2^e constante de Lamé (incompressibilité du fluide)

$$\lambda = K - 2\mu/3$$

Définitions

Coefficient de Poisson (σ)

σ est la mesure du changement géométrique dans la forme du corps élastique (dans les directions orthogonales à la direction de la contrainte)

$$\sigma = \frac{\text{déformation transversale}}{\text{déformation longitudinale}} = \frac{\Delta W/W}{\Delta l/l}$$

- σ est toujours inférieur à 0.5.
- Pour la plupart des roches, $\sigma \approx 0.25$.
- Le coefficient de Poisson est relié au module d'Young par la 2^e constante de Lamé λ :

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Définitions

Les constantes élastiques sont indépendantes deux par deux.

K	E	λ	σ	μ
$\lambda + 2\mu/3$	$\mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$	—	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	—
—	$9K\frac{K-\lambda}{3K-\lambda}$	—	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$3(K-\lambda)/2$
—	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$K - 2\mu/3$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	—
$\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$	—	$\mu\frac{E-2\mu}{3\mu-E}$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	—
—	—	$3K\frac{3K-E}{9K-E}$	$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{3KE}{9K-E}$
$\lambda\frac{1+\sigma}{3\sigma}$	$\lambda\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{\sigma}$	—	—	$\lambda\frac{1-2\sigma}{2\sigma}$
$\mu\frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}$	$2\mu(1+\sigma)$	$\mu\frac{2\sigma}{1-2\sigma}$	—	—
—	$3K(1-2\sigma)$	$3K\frac{\sigma}{1+\sigma}$	—	$3K\frac{1-2\sigma}{2+2\sigma}$
$\frac{E}{3(1-2\sigma)}$	—	$\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$	—	$\frac{E}{2+2\sigma}$

Contrainte

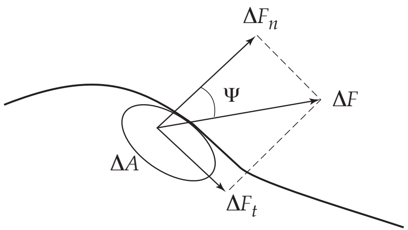
La contrainte est définie comme le rapport de la force sur la surface

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}.$$

Lorsque A tend vers zéro,

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial A}.$$

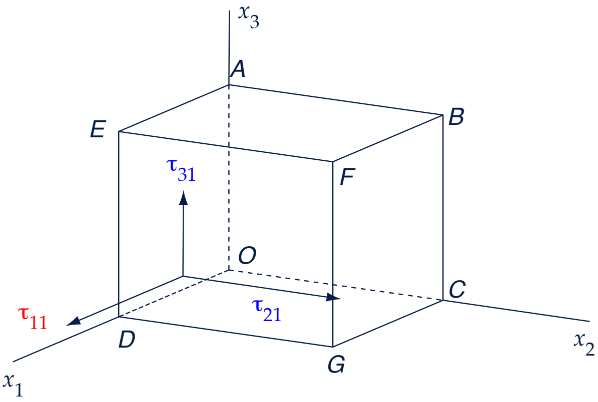
La contrainte normale (compression ou dilatation) s'exprime par $\partial F_n / \partial A$, la contrainte de cisaillement par $\partial F_t / \partial A$.



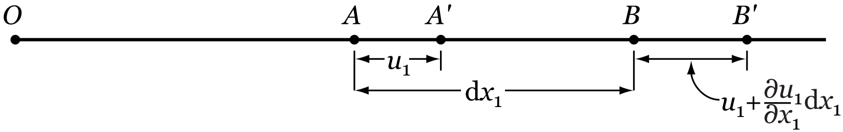
Contrainte

- En 3D avec système de référence x_1, x_2, x_3 et une surface $du_2\, du_3$ dont la normale est selon x_1, les composantes de la contrainte seront en compression selon τ_{11} et en cisaillement selon τ_{21} et τ_{31}.
- Notation : le premier indice représente la direction de la contrainte, et le deuxième indice est la direction de la normale au plan sur lequel la contrainte agit.
- Ainsi, on trouvera neuf composantes totales possibles, soient :
  - trois contraintes de compression (ou dilatation) : τ_{11}, τ_{22} et τ_{33}
  - six contraintes de cisaillement : τ_{12}, τ_{21}, τ_{13}, τ_{31}, τ_{23} et τ_{32} ; avec $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$ et $\tau_{23} = \tau_{32}$.

Contrainte



Déformation en compression/dilatation



Définition : variation du déplacement subie par A et B sur la séparation originale entre A et B, i.e.

$$\text{déformation} = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

ou encore

$$\epsilon_{11} = \frac{(dx_1 - u_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1) - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

et de manière générale

$$\epsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Déformation en compression/dilatation

La variation selon les trois dimensions de l'espace est

initialement	sous contrainte
dx_i	$dx_i\,(1+\epsilon_{ii})$

Le volume résultant initial est donc $V = dx_1\,dx_2\,dx_3$ et le volume sous contrainte est

$$V' = dx_1\,dx_2\,dx_3\,(1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22})(1+\epsilon_{33}).$$

Déformation en compression/dilatation

Le coefficient de dilatation Δ sera

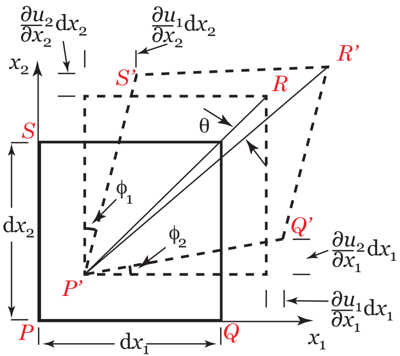
$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{(V' - V)}{V} = \frac{\Delta V}{V}\\ &= \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3\,(1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22})(1+\epsilon_{33}) - dx_1\,dx_2\,dx_3}{dx_1\,dx_2\,dx_3}\\ &= (1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22})(1+\epsilon_{33}) - 1\\ &= 1 + (\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33}) + (\epsilon_{11}\epsilon_{22}+\epsilon_{11}\epsilon_{33}+\epsilon_{22}\epsilon_{33}\\ &\qquad +\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}) - 1.\end{aligned}$$

En négligeant les produits des ϵ_{11}, ϵ_{22} et ϵ_{33}, on a

$$\boxed{\Delta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}.}$$

L'équation de l'onde P est exprimée en fonction de Δ.

Déformation en cisaillement



$$\phi_1 \approx \tan(\phi_1) = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\phi_2 = \partial u_2 / \partial x_1$$

Déformation en cisaillement

On définit ϵ_{12} comme la déformation de cisaillement

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

L'angle de rotation autour de l'axe x_3 est

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \equiv \theta_3.$$

En trois dimensions, on a

$$\begin{aligned}
\epsilon_{12} &= \epsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \\
\epsilon_{23} &= \epsilon_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \\
\epsilon_{31} &= \epsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Équations d'ondes

Équations d’ondes

- Soit une contrainte τ agissant sur un matériau *élastique* et provoquant une déformation ϵ.
- Suite à cette contrainte, le matériau est hors d’équilibre.
- Si τ est appliquée dans le plan $\perp$ à x_1, les forces par unité de volume selon x_1, x_2 et x_3 s’écrivent comme

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3};$$

- Voyons comment ces forces peuvent être reliées à une quantité mesurable.
- Définissons le vecteur de déplacement d’une particule (ou élément de volume) par

$$\mathbf{u} = u_1\hat{\mathrm{x}}_1 + u_2\hat{\mathrm{x}}_2 + u_3\hat{\mathrm{x}}_3.$$

Équations d'ondes

- $\mathbf{u}$ (ou sa dérivée dans le temps) est la quantité mesurée en sismique.
- La deuxième loi de Newton relie l'accélération $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ à la force exercée

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \text{Forces agissant sur le volume selon } x_1 \\ &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

où ρ est la densité (constante) du matériau.

Équations d'ondes

- Par ailleurs, les déformations sont exprimées en termes des composantes de **u**, i.e.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

- La loi de Hooke relie contraintes et déformations.
- La forme générale de la loi de Hooke s'écrit

$$\tau_{ij} = c_{ijpq}\epsilon_{pq}, \tag{1}$$

  où c_{ijpq} est un tenseur d'ordre 4 à 21 coefficients indépendants.
- Pour un milieu isotrope, on a $\tau_{ii} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{ii}$, et $\tau_{ij} = \mu\epsilon_{ij}$, $(i \neq j)$;
  - λ et μ sont les constantes de Lamé.

Équations d'ondes

On arrive ainsi a

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x_1} + 2\mu\frac{\partial\epsilon_{11}}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\epsilon_{12}}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial\epsilon_{13}}{\partial x_3} \\
&= \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x_1} + \mu\left[2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)\right] \\
&= \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x_1} + \mu\nabla^2 u_1 + \mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \\
&= (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x_1} + \mu\nabla^2 u_1. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Équations d'ondes

- Selon les axes x_2 et x_3, on obtient

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 \tag{3}$$

et

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3. \tag{4}$$

- On peut exprimer les équations (2), (3) et (4) sous forme vectorielle comme

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \Delta + \mu \nabla^2 \mathbf{u}.} \tag{5}$$

- Cette équation permet de décrire le mouvement des particules dans un milieu *élastique*, *homogène* et *isotrope*.

Onde P

- La forme générale de l'équation d'onde est

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi \tag{6}$$

  avec V la vitesse de l'onde.
- En effectuant la divergence de (5) on obtient

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \nabla^2 \Delta \tag{7}$$

  qui décrit la propagation d'une perturbation se déplacant avec une vitesse $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.
- (7) est l'équation de l'onde P, qui se propage avec une vitesse α.
- On nomme parfois la quantité $M = \rho\alpha^2$ module de l'onde P.

Institut national de la recherche scientifique

Onde P

Onde S

- S'il y a un mouvement de rotation, l'onde est décrite par le rotationel de (5).
- L'équation vectorielle pour les ondes S s'écrit alors

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \nabla^2 \Theta \tag{8}$$

en utilisant la définition des angles de rotation de la déformation tels que

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),$$
$$\theta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

et

$$\Theta = \theta_1 \hat{x}_1 + \theta_2 \hat{x}_2 + \theta_3 \hat{x}_3 = \frac{\nabla \times \mathbf{u}}{2}.$$

Onde S

- Le terme Θ décrit le cisaillement que subit le volume de référence.
- L'onde S se propage avec une vitesse $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$.
- Les constantes d'élasticité sont toujours positives → la vitesse $\beta < \alpha$.
- L'expression reliant α et β est $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{\lambda}{\rho}\right)}$, ou bien

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{0.5 - \sigma}{1 - \sigma}\right)^{1/2},$$

où σ est le coefficient de Poisson. Une autre expression pratique est

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{(\alpha/\beta)^2 - 2}{(\alpha/\beta)^2 - 1},$$

qui montre que σ=0.5 pour les liquides (β=0).

Onde S

Solutions particulières aux équations d'onde

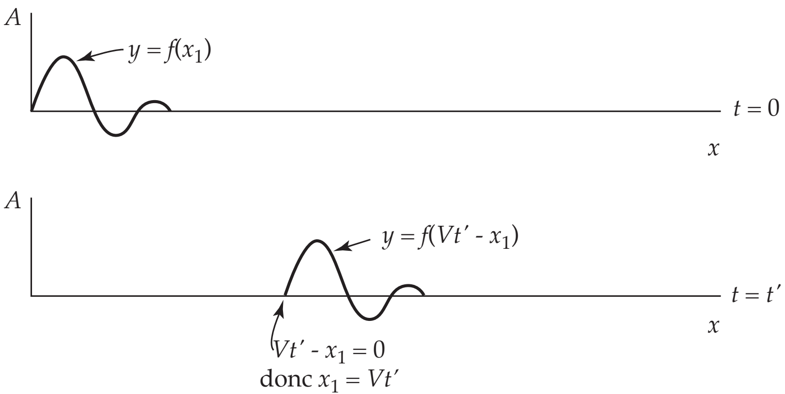
Onde plane

- L'équation (5) n'est pas toujours pratique pour décrire certains phénomènes, en particulier le partitionnement de l'énergie à une interface.
- Par ailleurs, on s'intéresse souvent aux ondes P uniquement.
- Partant de l'équation (6) récrite ci-dessous, considérons le cas où φ est fonction de x_1 et de t seulement.

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \nabla^2\varphi$$

- Toute fonction $\varphi = f(x_1 \pm Vt)$ est alors une solution de l'équation d'onde, en autant que φ est ses deux premières dérivées soient finies et continues.
- Le choix d'une fonction donnée par rapport à une autre dépend principalement des conditions aux frontières du problème à résoudre.

Onde plane



Onde plane

- La quantité $x_1 \pm Vt$ est appelée la phase de l'onde.
- Les surfaces sur lesquelles la phase est constante sont les *fronts d'onde*.
- Dans le cas où la propagation se fait uniquement selon x_1, ces surfaces sont planes et perpendiculaires à x_1, et on a alors affaire à une onde plane.
- L'approximation de l'onde plane est valide pour étudier le comportement de l'onde au voisinage d'un objet de faible dimension par rapport à la courbure du front d'onde.

Potentiels de déplacement

- Il est possible de trouver des solutions pour (7) et (8) en fonction de la dilatation Δ et du cisaillement Θ.
- Cependant, il est plus intéressant d'avoir une expression pour le déplacement ($\mathbf{u}$) ou la vitesse ($\partial \mathbf{u}/\partial t$) des particules constituants le milieu, ces quantités étant plus facilement mesurables.
- On introduit deux fonctions de potentiel $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ et $\chi(x_1, x_2, x_3, t)$, solutions de l'équation d'onde (6), et à partir desquels le déplacement $\mathbf{u}$ peut être obtenu.

Potentiels de déplacement

- Si l'on pose φ et χ tel que

$$\mathbf{u} = \nabla\left(\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial x_3}\right) - \nabla^2\chi\hat{x}_3, \tag{9}$$

on peut montrer que

$$\Delta = \nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla^2\varphi \tag{10}$$

$$2\Theta = \nabla\times\mathbf{u} = \nabla^2\chi\hat{x}_2. \tag{11}$$

Potentiels de déplacement

- Considérons maintenant le cas simple où le potentiel χ est nul et que le potentiel φ ne varie que dans la direction x_1 (c.-à-d. $\varphi = \varphi(x_1, t)$).
- Le déplacement des particules en un point sera décrit par

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, 0, 0\right).$$

- Ce déplacement se fait donc dans la même direction que la propagation de l'onde.
- Cette onde est donc une onde P.

Potentiels de déplacement

- Si φ est nul en tout point et que χ varie seulement dans la direction x_1 (c.-à-d. $\chi = \chi(x_1, t)$), le déplacement des particules est décrit par

$$\mathbf{u} = \nabla \times \chi = \left(0, -\frac{\partial \chi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1}\right).$$

- Les particules se déplacent perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde et nous sommes en présence d'une onde S.
- L'onde S est souvent décomposée en une composante verticale par rapport à la direction de propagation (SV) et en une composante horizontale (SH), c.-à-d. l'onde est polarisée.

Ondes harmoniques

- Quelle forme peuvent prendre les potentiels de déplacement ?
- Les ondes harmoniques constituent la solution la plus simple pour résoudre (9).
- Une onde harmonique monochromatique de vitesse V est décrite par

$$\psi = A \sin k(lx_1 + mx_2 + nx_3 - Vt)$$

ou bien

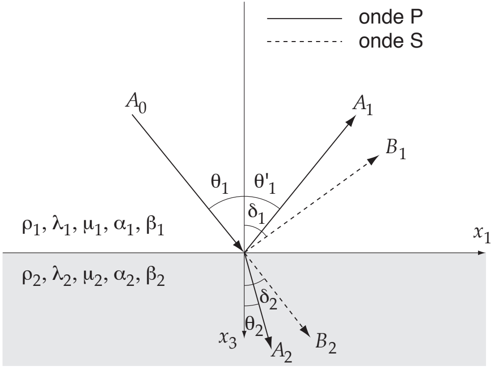
$$\psi = A \exp^{j\omega[\{lx_1+mx_2+nx_3)/V\}-t]} . \tag{12}$$

- Cette onde se propage selon le cosinus directeur (l, m, n) et a une longueur d'onde égale à $\lambda = 2\pi/k$.
- La longueur d'onde est reliée à la vitesse et la fréquence f $(f = \omega/2\pi)$ par

$$V = f\lambda. \tag{13}$$

Ondes harmoniques

- Soit le cas simple d'une onde P incidente à la surface séparant deux demi-espaces.



Ondes harmoniques

- Les fonctions de potentiel peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_3, t) &= A_0 \exp^{i\omega\left(\frac{x_1 \sin\theta_1}{\alpha_1} + \frac{x_3 \cos\theta_1}{\alpha_1} - t\right)} \\ &\quad + A_1 \exp^{i\omega\left(\frac{x_1 \sin\theta_1'}{\alpha_1} + \frac{x_3 \cos\theta_1'}{\alpha_1} - t\right)} \qquad (14) \\ \chi_1(x_1, x_3, t) &= -B_1 \exp^{i\omega\left(\frac{x_1 \sin\delta_1}{\beta_1} - \frac{x_3 \cos\delta_1}{\beta_1} - t\right)} \hat{x}_2 \qquad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_3, t) &= A_2 \exp^{i\omega\left(\frac{x_1 \sin\theta_1}{\alpha_1} + \frac{x_3 \cos\theta_1}{\alpha_1} - t\right)} \qquad (16) \\ \chi_2(x_1, x_3, t) &= -B_2 \exp^{i\omega\left(\frac{x_1 \sin\delta_2}{\beta_2} + \frac{x_3 \cos\delta_2}{\beta_2} - t\right)} \hat{x}_2. \qquad (17) \end{aligned}$$

- Ces équations permettent de calculer le coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence : 1^{er} pas pour une interprétation *quantitative*.

Ondes de Rayleigh

- Les ondes de Rayleigh sont dues à l'interaction des ondes P et SV à une surface libre.
- Soit x_3 l'axe vertical et la surface libre dans le plan x_1-x_2 à $x_3 = 0$, les contraintes τ_{13}, τ_{23} et τ_{33} y sont nulles.
- Considérons les potentiels de déplacement

$$
\begin{aligned}
\varphi &= A \exp\left[i\omega(px_1 + \eta_\alpha x_3 - t)\right] \\
&= A \exp\left[-\omega\hat{\eta}_\alpha x_3\right] \exp\left[i\omega(px_1 - t)\right]; \\
\chi &= B \exp\left[i\omega(px_1 + \eta_\beta x_3 - t)\right] \\
&= B \exp\left[-\omega\hat{\eta}_\beta x_3\right] \exp\left[i\omega(px_1 - t)\right].
\end{aligned}
$$

où $p = 1/c$ est la lenteur (inverse de la vitesse) *horizontale*.

Ondes de Rayleigh

- Les constantes η_α et η_β sont

$$
\begin{aligned}
\eta_\alpha &= \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - p^2} = i\hat{\eta}^\alpha \\
&= i\sqrt{p^2 - \frac{1}{\alpha^2}} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}}. \\
\eta_\beta &= \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2} = i\hat{\eta}^\beta \\
&= i\sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta^2}} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta^2}}.
\end{aligned}
$$

Ondes de Rayleigh

- En appliquant les conditions aux frontières, on trouve

$$u_1 = -A\omega p \sin[\omega(px_1 - t)] \left[\mathrm{e}^{-\omega\hat{\eta}_\alpha x_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right) \mathrm{e}^{-\omega\hat{\eta}_\beta x_3} \right] \tag{18}$$

et

$$u_3 = -A\omega p \cos[\omega(px_1 - t)] \left[c\hat{\eta}\alpha \mathrm{e}^{-\omega\hat{\eta}_\alpha x_3} + \frac{1}{2c\hat{\eta}_\beta}\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2\right) \mathrm{e}^{-\omega\hat{\eta}_\beta x_3} \right]. \tag{19}$$

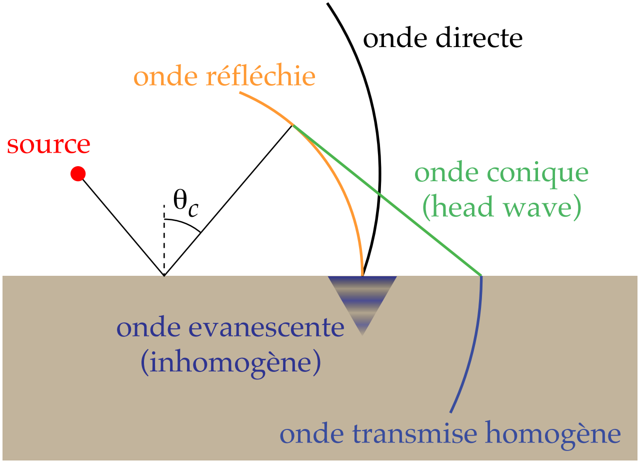
Ondes de Rayleigh

- Les déplacements ci-dessus ont une dépendance harmonique en x_1, et exponentielle en x_3.
- L'amplitude décroît exponentiellement en fonction de la profondeur, l'onde est dite *évanescente*.
- Les déplacements selon x_1 et x_3 sont déphasés de 90°, et se combinent pour produire un mouvement ellipsoidal.
- En sismique d'exploration, les ondes de Rayleigh sont souvent appelées *ground roll*.
- On peut par ailleurs montrer que c (la vitesse de l'onde de Rayleigh) est toujours inférieure à β.
- En générale, c vaut entre 0.9β et 0.95β.

Ondes de Rayleigh

Fronts d'onde

- L'interaction à une interface génère différents fronts d'onde :

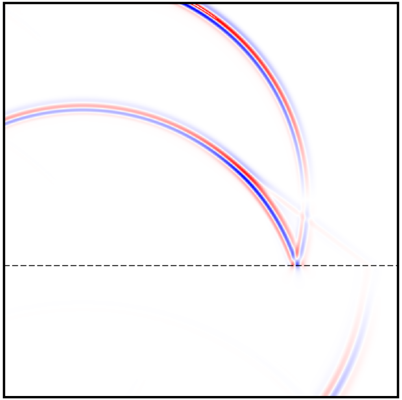


Fronts d’onde

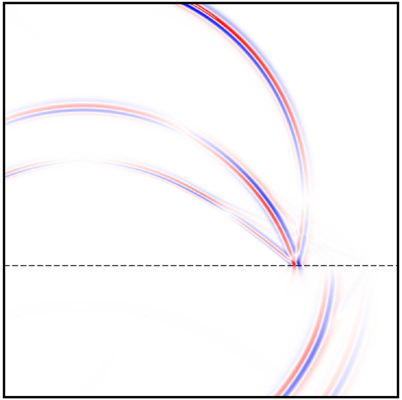
Fronts d’onde

Fronts d'onde

$v_z \quad (\mu = 0)$



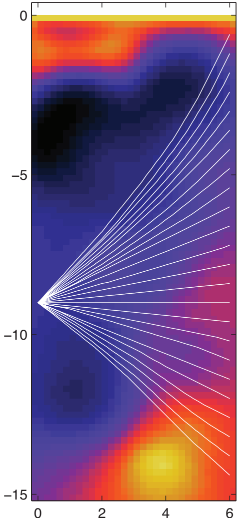
$v_z \quad (\mu \neq 0)$



Rais sismiques

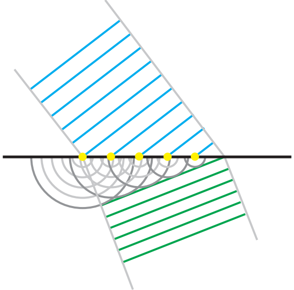
Rais sismiques

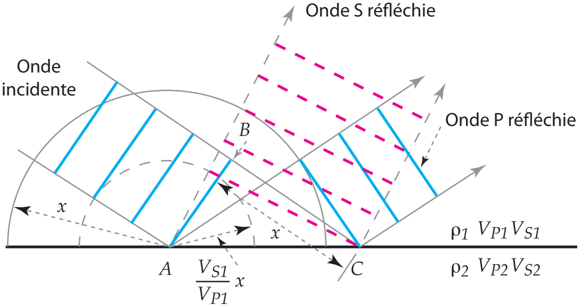
- Le rai sismique constitue une façon simple de se représenter la *trajectoire* de propagation de l'onde.



Réflexion d'une onde plane

Principe de Huygens-Fresnel





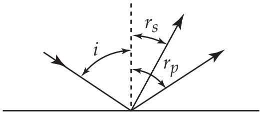


Diagramme équivalent

Réflexion d'une onde plane

- Soit un front d'onde AB incident avec un angle i ;
- Le point A est la source d'une onde P et d'une onde SV convertie ;
- Le temps requis pour aller de B à C est égal au rayon x pour l'onde P et à $\frac{V_{S1}}{V_{P1}}x$ pour l'onde S ;
- Si on trace une tangente du point C au front d'onde P, on voit que l'angle de réflexion r_p est égal à l'angle i ;
- Pour l'onde S, l'angle de réflexion r_s est donné par

$$\sin r_s = \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \sin i. \tag{20}$$

Réflexion d'une onde plane

- On a ainsi que

$$\frac{\sin i}{V_{P1}} = \frac{\sin r_p}{V_{P1}} = \frac{\sin r_s}{V_{S1}} = p, \tag{21}$$

où p est le paramètre du rai.

- Lorsque $i = 0$, le rapport entre l'énergie réfléchie et l'énergie incidente est donné par

$$\left.\frac{E_r}{E_i}\right|_0 = \frac{(\rho_2 V_{P2} - \rho_1 V_{P1})^2}{(\rho_2 V_{P2} + \rho_1 V_{P1})^2}. \tag{22}$$

- Ce rapport dépend de l'impédance acoustique (ρV). Si $\rho_2 V_2 = \rho_1 V_1$, il n'y a pas de réflexion.

Réfraction d’une onde plane

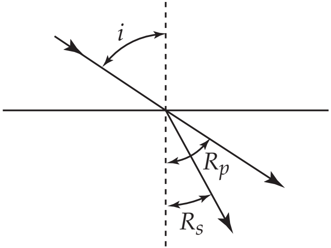
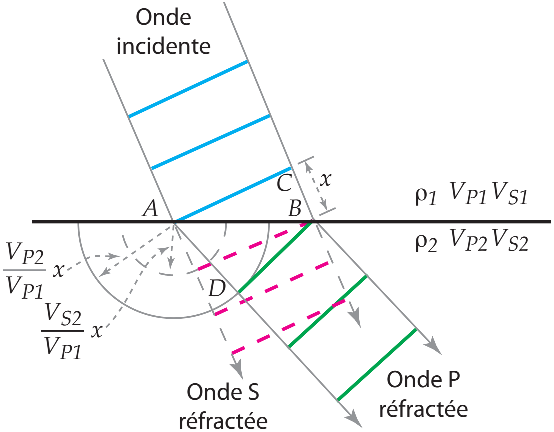


Diagramme équivalent



Réfraction d'une onde plane

- Le temps requis pour aller de B à C dans le milieu 1 est égal à $\frac{V_{P2}}{V_{P1}}x$ pour l'onde P dans le milieu 2, et à $\frac{V_{S2}}{V_{P1}}x$ pour l'onde S.
- La géométrie du problème nous dit également que

$$\sin i = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{AB} \quad \text{et} \quad \sin R_p = \frac{AD}{AB} = \frac{V_{P2}}{V_{P1}}\frac{x}{AB}$$

d'où on tire la loi de Snell

$$\frac{\sin i}{\sin R_p} = \frac{V_{P1}}{V_{P2}}. \tag{23}$$

- Pour l'onde de cisaillement, on a

$$\frac{\sin i}{\sin R_s} = \frac{V_{P1}}{V_{S2}}. \tag{24}$$

Réfraction d'une onde plane

- Lorsque $\sin i = \frac{V_{P1}}{V_{P2}}$, $\sin R_p = 1$ et $R_p = 90°$, l'onde ne pénètre pas dans le deuxième matériau mais voyage à l'interface entre les deux milieux.
- L'angle critique est défini par

$$i_c = \sin^{-1}\left(\frac{V_{P1}}{V_{P2}}\right). \tag{25}$$

  Pour tout angle d'incidence i plus grand que i_c, il n'y a pas de réfraction et l'onde est totalement réfléchie.
- Les lois de la réflexion et de la réfraction peuvent être synthétisés en statuant qu'à une interface, le paramètre du rai p (éq (21)) a la même valeur pour l'onde incidente, l'onde réfléchie, et l'onde réfractée. Il s'agit de la forme générale de la loi de Snell.

Équation de l'eikonal

- Point de départ : propagation d'une perturbation discontinue dans un milieu homogène.
- Cette discontinuité est définie comme le produit de deux fonctions, l'une du temps et l'autre de la position :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(t - T) f(\mathbf{x}) \tag{26}$$

où T correspond au temps de parcours (*travel time*) et dépend de la position, c.-à-d. $T = T(\mathbf{x})$ (problème non linéaire).

  - $\mathbf{U}$ décrit la *forme* de l'ondelette sismique au voisinage du front d'onde ;
  - f donne la variabilité spatiale de *l'amplitude* de l'ondelette.

Équation de l'eikonal

- L'équation (26) est une solution de l'équation (5) valide en tout point à l'exception de la position de la source, considérée ponctuelle.
- Considérons la composante selon x_1, on a que

$$\rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} f = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1 f}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2 f}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3 f}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 U_1 f .$$

Équation de l'eikonal

- En distribuant les dérivées partielles et le Laplacien, on obtient

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} f = (\lambda + \mu)\Bigg[& f \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \\
& + f \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_2} + U_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \\
& + f \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial U_3}{\partial x_3} + U_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \Bigg] \\
+ \mu\Bigg[& f \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \\
& + f \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + U_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \\
& + f \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + U_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \Bigg].
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Équation de l'eikonal

- Or, $\mathbf{U}$ dépend de T qui à son tour dépend de la position, avec une dépendance de la forme $t - T(\mathbf{x})$;
- Cette forme de dépendance permet de trouver une relation du type suivant pour les composantes de $\mathbf{U}$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial T}{\partial x_2} - \frac{\partial U_i}{\partial t}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{28}$$

- Il faut maintenant combiner les composantes U_1, U_2 et U_3, ce qui donne une expression complexe reliant les dérivées secondes temporelles de $\mathbf{U}$, les dérivées premières spatiales et temporelles de $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}$ ainsi que f et ses gradients.
- Or, au voisinage du front d'onde, $\mathbf{U}$ fluctue plus rapidement que f, ce qui fait que $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}$ fluctuent d'autant plus vite.

Équation de l'eikonal

- On peut alors dégager la condition suivante

$$\left(\nabla T \cdot \nabla T - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)\left(\nabla T \cdot \nabla T - \frac{\rho}{\mu}\right) = 0. \tag{29}$$

- De l'équation précédente, on peut extraire l'équation de l'eikonal

$$\boxed{\nabla T \cdot \nabla T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2 = s^2}$$

où $s = s(\mathbf{x})$ est la lenteur (inverse de la vitesse).

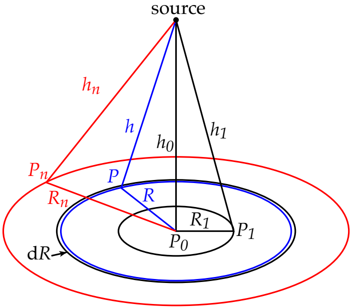
- Cette équation est la base de plusieurs algorithmes de tracé de rai, très utilisés en inversion/tomographie.

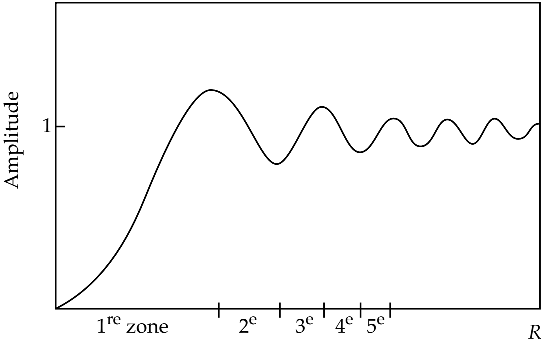
Institut national de la recherche scientifique

Résolution

Zone de Fresnel

- Une réflexion est en réalité constituée d'énergie réfléchie par une aire relativement étendue.
- Considérant un front d'onde sphérique, la zone de Fresnel est la surface à partir de laquelle l'énergie réfléchie n'est pas déphasée de plus d'un quart de cycle, i.e. l'énergie interfère de façon constructive.





Zone de Fresnel

- Pour une onde de longueur d'onde λ, l'amplitude retournée au point source en fonction du rayon est maximum à $R_1 = (\lambda h_0/2)^{1/2}$;
- La contribution principale provient de la surface définie par le cercle de rayon R_1, que l'on nomme première zone de Fresnel, ou simplement zone de Fresnel.
- La première zone de Fresnel est souvent utilisée comme mesure de la résolution horizontale.
- *Si le réflecteur est de dimension inférieure à cette zone, sa réponse est essentiellement celle d'un point diffractant.*

Longueur d'onde

- Le signal mesuré est une ondelette, de fréquence dominante f donnée (bande passante donnée) ;
- Pour une vitesse de propagation V donnée, la longueur d'onde est $\lambda = V/f$;

Longueur d'onde (m)

Fréquence (Hz)	Vitesse (m/s) 1000	2000	3000	4000	5000
1	1000	2000	3000	4000	5000
40	25	50	75	100	125
100	10	20	30	40	50
500	2	4	6	8	10

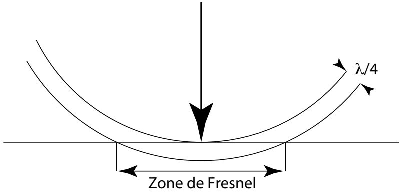
Vitesses sismiques des roches

Nature des terrains	V_p [m/s]	V_s [m/s]	ρ [g/cm^3]
éboulis, terre végétale	300-700	100-300	1.7-2.4
sable sec	400-1200	100-500	1.5-1.7
sable humide	1500-4000	400-1200	1.9-2.1
argiles	1100-2500	200-800	2.0-2.4
marnes	2000-3000	750-1500	2.1-2.6
grès	3000-4500	1200-2800	2.1-2.4
calcaires	3500-6000	2000-3300	2.4-2.7
craie	2300-2600	1100-1300	1.8-2.3
sel	4500-5500	2500-3100	2.1-2.3
anhydrite	4000-5500	2200-3100	2.9-3.0
dolomie	3500-6500	1900-3600	2.5-2.9
granite	4500-6000	2500-3300	2.5-2.7
basalte	5000-6000	2800-3400	2.7-3.1
charbon	2200-2700	1000-1400	1.3-1.8
eau	1450-1500	-	1
glace	3400-3800	1700-1900	0.9
huile	1200-1250	-	0.6-0.9

Résolution et détection

- Pouvoir de résolution
  - capacité de séparer en profondeur deux horizons ;
  - de l'ordre de $\lambda/4$ à $\lambda/2$ selon la largeur de bande et le niveau de bruit.
- Pouvoir de détection
  - la plus petite couche qui puisse donner naissance à une réflexion ;
  - se situe entre $\lambda/30$ et $\lambda/10$.

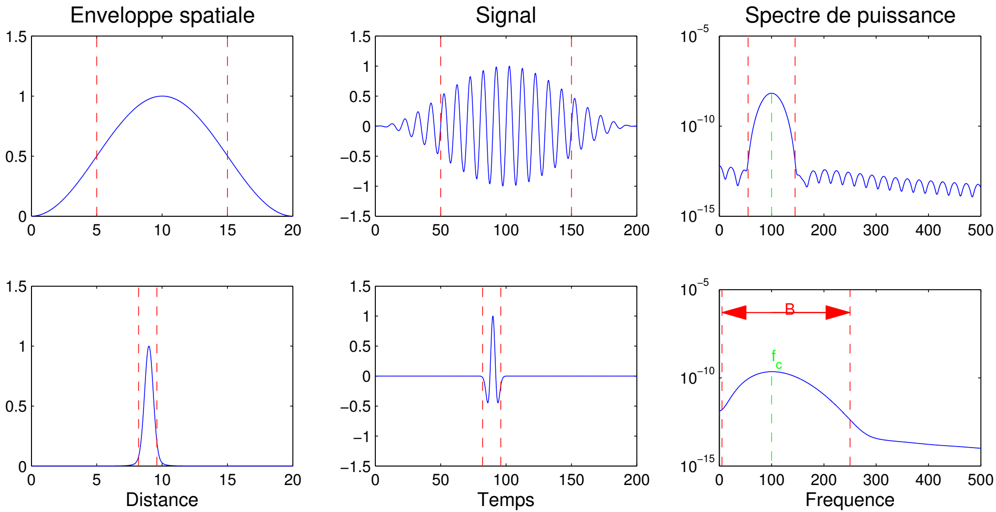
- Résolution latérale
  - capacité d'individualiser latéralement deux événements ;
  - reliée à la zone de Fresnel ;



- Bref : plus la longueur d'onde est courte (et la fréquence élevée), meilleure est la résolution.

Institut national de la recherche scientifique

Fréquence centrale et largeur de bande



Atténuation des ondes

Origine et cause

- L'atténuation peut être définie comme la diminution de l'amplitude et une perte préférentielle des hautes fréquences du signal sismique, en fonction de la distance de propagation ou du temps.
- C'est un phénomène aux causes multiples.
- Un des facteurs principaux en est l'absorption, c'est-à-dire la transformation de l'énergie sismique en chaleur par friction interne ou granulaire dans un milieu inélastique, ou entre un fluide et la matrice poreuse le contenant.
- Un autre facteur important est la diffusion (*scattering*) de l'énergie sismique occasionnée par des hétérogénéités de faibles dimensions.

Le facteur de qualité sismique Q

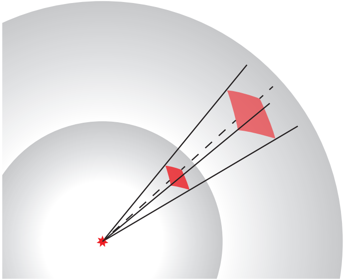
- Le facteur de qualité Q (adimensionnel) est généralement utilisé pour quantifier l'atténuation propre à un matériau ;
- Le facteur Q est inversement proportionnel à l'énergie absorbée par le milieu lors d'un cycle d'oscillation de l'onde

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi/(\text{fraction d'énergie perdue par cycle}) \\ &= 2\pi/(\Delta E/E) \end{aligned} \tag{30}$$

- Plus le matériau est de piètre qualité du point de vue sismique, plus l'énergie de l'onde sismique dissipée (ΔE) est grande, plus le facteur de qualité sera faible.

Divergence géométrique

- Phénomène dû à une redistribution de l'énergie en fonction de la surface occupée par le front d'onde.
- Son effet varie selon le type d'onde se propageant, soit qu'elle est plane, cylindrique ou sphérique.
- Décrite par un rapport d'intensité, l'intensité I étant la quantité d'énergie se propageant à travers une surface normale à la direction de propagation par unité de temps.
- Onde sphérique : surface $= 4\pi r^2 \rightarrow$ décroissance de l'intensité par l'inverse du carré de la distance à la source.
- Onde plane : divergence nulle et intensité constante.
- On utilise souvent une relation en $1/r$ pour corriger la divergence géométrique (choix arbitraire).



Absorption vs divergence

- L'absorption est souvent décrite par une exponentielle décroissante

$$A = A_0 e^{-\alpha x}$$

où α est le coefficient d'atténuation et x la distance parcourue.

- Considérons une onde de vitesse V=2000 m/s et un milieu où α=0.1 dB/λ (A_0 est évaluée à 200 m de la source)

	Freq (Hz)	x=1200 m (dB)	x=2200 m (dB)	x=4200 m (dB)	x=8200 m (dB)
Absorption	1	0.22	0.43	0.86	1.7
	3	0.64	1.3	2.6	5.2
	10	2.2	4.3	8.6	17
	30	6.4	13	26	52
	100	22	43	86	170
Divergence	$\forall$	16	21	26	32

Divergence géométrique en $1/r$

Références

Références

Référence générale

- Sheriff, R. E. and Geldart, L. P. (1995). *Exploration Seismology*. Cambridge University Press, 2^{nd} edition

Pour aller plus loin

- Aki, K. and Richards, P. G. (2002). *Quantitative Seismology*. University Science Books, Sausalito, CA, 2^{nd} edition
- Carcione, J. M. (2007). *Wave Fields in Real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, volume 38 of *Handbook of Geophysical Exploration : Seismic Exploration*. Elsevier, 2^{nd} edition
- Červený, V. (2005). *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press

Institut national de la recherche scientifique

Références

- Dahlen, F. A. and Tromp, J. (1998). *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press
- Mavko, G., Mukerji, T., and Dvorkin, J. (2009). *The Rock Physics Handbook*. Cambridge University Press, 2nd edition
- Lay, T. and Wallace, T. C. (1995). *Modern Global Seismology*, volume 58 of *International Geophysics Series*. Academic Press, San Diego