GEO1302 – Modélisation et inversion en géophysique
2 - Gravimétrie et magnétisme

Bernard Giroux
(bernard.giroux@ete.inrs.ca)

Institut national de la recherche scientifique
Centre Eau Terre Environnement

Version 1.2.9
Hiver 2020

Gravimétrie

Théorie

- Le potentiel gravitationnel obéit au principe de superposition : le potentiel gravitationnel d'un nombre fini de masses est la somme de l'attraction de chacune de ces masses.
- Si les masses sont infinitésimales (dm), le potentiel U observé en P est ainsi

$$U(P) = G \int_V \frac{\mathrm{d}m}{r} \tag{1}$$

ou bien

$$U(P) = G \int_V \frac{\rho(Q)}{r} \mathrm{d}v, \tag{2}$$

où G est la constante gravitationnelle, V est le volume occupé par la masse totale, ρ est la densité, Q est le point d'intégration, et r est la distance entre P et Q.

Théorie

- L'attraction $\mathbf{g}$ causée par un volume de densité ρ est le gradient du potentiel :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \nabla U \\ &= -G \int_V \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{3}$$

- Dans la pratique, seule la composante verticale de $\mathbf{g}$ est mesurée, ce qui donne (en coordonnées cartésiennes)

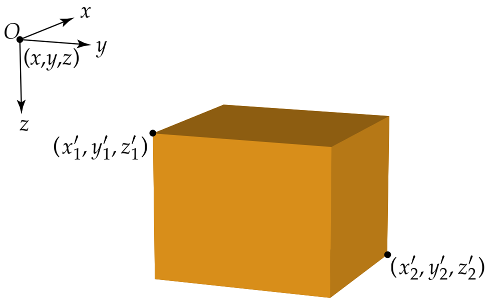
$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -G \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x',y',z') \frac{z-z'}{r^3} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z', \end{aligned} \tag{4}$$

où $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

Théorie

- Typiquement, la modélisation en gravimétrie consiste à calculer $g(x, y, z)$ avec l'équation (4) pour toutes les cellules du modèle géologique.
- Mais dans les faits, on mesure la variation de g par rapport à un point de référence donné, pour estimer le contraste de densité ($\Delta\rho$) par rapport à un encaissant ;
  - *On peut donc ne calculer que la réponse des corps qui ont une densité différente de celle de l'encaissant.*
- La solution de l'intégrale triple dépend de la discrétisation du corps.
- Des solutions particulières ont été proposées pour des
  - prismes rectangulaires droits ;
  - prismes polygonaux droits ;
  - polyèdres.

Théorie - Prisme rectangulaire droit



- Pour un prisme rectangulaire droit défini par les limites $x_1' \leq x \leq x_2'$, $y_1' \leq y \leq y_2'$ et $z_1' \leq z \leq z_2'$, la composante verticale g au point d'observation O vaut

$$g = -G\rho \int_{x_1'}^{x_2'} \int_{y_1'}^{y_2'} \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{z - z'}{r^3} \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \mathrm{d}z'. \tag{5}$$

Théorie - Prisme rectangulaire droit

- Plusieurs solutions ont été proposées pour le cas du prisme rectangulaire droit.
- Il est important de noter que *certaines solutions ne sont pas valides si le point d'observation est sur un des coins, une des faces, ou à l'intérieur du prisme.*
- Une solution valide sur les faces (excluant les arêtes) et à l'intérieur est (Li et Chouteau, 1998)

$$g = -G\rho \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \mu_{ijk} \times \left[x_i \ln\left(y_j + r_{ijk}\right) + y_j \ln\left(x_i + r_{ijk}\right) + z_k \arctan \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j} \right], \quad (6)$$

où $x_i = x - x'_i$, $y_j = y - y'_j$, $z_k = z - z'_k$,
$r_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$ et $\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$.

Théorie - Prisme rectangulaire droit

- Note relative à l'implémentation de l'équation (6) sous Python/MATLAB :
  - la fonction `atan2` (ou `arctan2` sous `numpy`) doit être utilisée au détriment de `atan` (ou `arctan` sous `numpy`).

    Pourquoi ?

Exercice - Prisme rectangulaire droit

- Créez un fichier Python `gravi.py` ;
- Dans ce fichier, écrivez une fonction `prd` pour calculer la réponse d'un prisme rectangulaire droit ;
- Votre fonction doit prendre les variables suivantes en entrée :
  - `rho` : densité [g / cm^3]
  - `x0` : coordonnées [x y z] du point d'observation [m]
  - `x` : coord inférieure et supérieure du prisme selon x [m]
  - `y` : coord inférieure et supérieure du prisme selon y [m]
  - `z` : coord inférieure et supérieure du prisme selon z [m]

  et doit retourner la réponse en mgal.
- Testez votre routine avec les valeurs `rho=0.2`, `x=(10, 15)`, `y=(20, 25)` et `z=(5, 15)` pour
  - `x0=(0, 0, 0)`
  - `x0=(12.5, 22.5, 10)`

Théorie - Polyèdre

Gravimétrie
Théorie
Prisme rectangulaire droit
Polyèdre
Système matriciel
Magnétisme
Références
Annexes

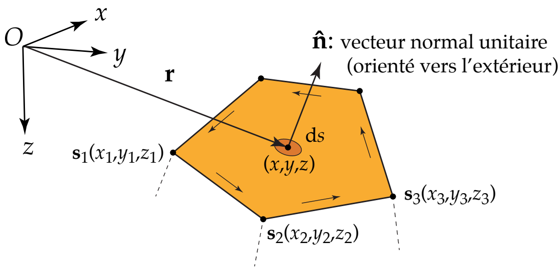
- Le polyèdre constitue la forme géométrique la plus versatile pour représenter des corps de géométrie arbitraire.

Théorie - Polyèdre

- Singh et Guptasarma (2001) : En vertu du théorème de flux-divergence, l'intégrale sur le volume de l'équation (3) peut être remplacée par une intégrale de surface.
- Il est alors possible d'évaluer la composante de la gravité $\mathbf{g}$ dans la direction du vecteur unitaire $\hat{\mathbf{a}}$ par

$$\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{a}} = -G\rho \iint_S \left(\frac{1}{r}\right) \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}s, \tag{7}$$

où r est la distance entre O et l'aire ds à la surface du corps, et $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à ds.



Théorie - Polyèdre

- L'élément ds produit une attraction orientée selon $\mathbf{r}$ mais de sens contraire, ce qui permet de remplacer $\hat{\mathbf{a}}$ par $-(\mathbf{r}/r)$.
- Une expression pratique est obtenue en définissant une densité de masse surfacique (σ') par

$$\sigma' = \rho \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \tag{8}$$

  - L'attraction d'un corps est la même que l'attraction produite par un distribution fictive de σ' sur la surface du corps.
- Nous avons maintenant

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= G\rho \iint (1/r)(\mathbf{r}/r) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}s \\ &= G \iint \left(\sigma'/r^2\right) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{9}$$

Théorie - Polyèdre

- La composante verticale g est obtenue en multipliant l'intégrande par le rapport (z/r).
- Dans le cas où le corps est délimité par un polyèdre, i.e. un ensemble de n_f faces planes, nous avons

$$g = G \sum_{i=1}^{n_f} \rho d_i \iint_i \left(\frac{z}{r^3} \right) \mathrm{d}s, \tag{10}$$

où $d_i = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$.

- Le vecteur $\hat{\mathbf{n}}_i$ peut être obtenu à partir du produit vectoriel des arêtes de la face i :
  - Soient n_s sommets $\mathbf{s}_{i,k}$ appartenant à la face i, où l'indice k défini l'ordre antihoraire lorsque l'objet est vu de l'extérieur ;
  - le vecteur $\mathbf{n}_i$ vaut

$$\mathbf{n}_i = \sum_{l=2}^{n_s-1} \left(\mathbf{s}_{i,l} - \mathbf{s}_{i,1} \right) \times \left(\mathbf{s}_{i,l+1} - \mathbf{s}_{i,1} \right), \tag{11}$$

  et, par définition,

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|}. \tag{12}$$

Théorie - Polyèdre

- Pour arriver à une expression utilisable numériquement, l'intégrale de surface est convertie en intégrale de contour.
- On peut montrer que

$$\iint_i \left(\frac{z}{r^3}\right) \mathrm{d}s = -\left(n\Omega + mP_i - \ell Q_i\right), \tag{13}$$

où (ℓ, m, n) sont les composantes de $\hat{\mathbf{n}}_i$, Ω est l'angle solide de la face i au point O, et où P_i et Q_i sont les sommes

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_a} P_{ij} \quad \text{et} \quad Q_i = \sum_{j=1}^{n_a} Q_{ij}, \tag{14}$$

avec n_a le nombre d'arêtes sur la face i.

Théorie - Polyèdre

- Les composantes P_{ij} et Q_{ij} sont égales à

$$P_{ij} = IL_x \quad \text{et} \quad Q_{ij} = IL_y \tag{15}$$

avec $L_x = x_2 - x_1$ et $L_y = y_2 - y_1$ où (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées du début et de la fin du segment, et où

$$I = \frac{1}{L} \ln \left[\frac{\sqrt{L^2 + b + r_1^2} + L + \frac{b}{2L}}{r_1 + \frac{b}{2L}} \right] \text{ si } (r_1 + b/2L) \neq 0 \tag{16}$$

et

$$I = \frac{1}{L} \ln \left[\frac{|L - r_1|}{r_1} \right] \text{ si } (r_1 + b/2L) = 0, \tag{17}$$

avec

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2},\ b = 2(x_1 L_x + y_1 L_y + z_1 L_z), \tag{18}$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

`kron` - une commande `numpy` utile

- À l'invite de commande python, entrez `help(np.kron)`
- Essayez `np.kron([[1,2],[3,4]],np.ones((2,1)))`
- Essayez `np.kron([[1,2],[3,4]],np.ones((1,2)))`
- Exercice :
  - Soient des points définis aux coordonnées
    - `x = np.arange(0.0,0.8,0.2)`
    - `y = np.arange(0.1,0.5,0.1)`
    - `z = np.arange(-0.3,0.4,0.3)`
  - Construisez une matrice `npts`×3 contenant les coordonnées x, y, z de chacun des points, un point par ligne
  - Faites varier d'abord la coordonnées z, ensuite la coordonnées y et finalement la coordonnée x, i.e.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_1 & y_2 & z_1 \\ x_1 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Système matriciel

- Lorsque le problème direct est linéaire, comme en gravimétrie, ou qu'il a été linéarisé, il est fréquent en inversion de le représenter par un produit matriciel, souvent noté

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{d}, \tag{19}$$

  où

  - $\mathbf{m}$ est un vecteur $M \times 1$ contienant les paramètres du modèle (la densité des corps en gravimétrie) ;
  - $\mathbf{d}$ est le vecteur $N \times 1$ des données ;
  - $\mathbf{G}$ est l'opérateur direct (*data kernel*), de taille $N \times M$;
    - $\mathbf{G}(n, m) \equiv g_{nm}$, la contribution du m^e corps à la n^e donnée.
- Cette approche n'est intéressante que pour les situations où :
  - le maillage ne change pas ;
  - les calculs sont répétés pour différents vecteurs $\mathbf{m}$.

- Pour une grille régulière, constituée de prismes rectangulaires droits, on aurait

$$g_{nm} = -G \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \mu_{ijk} \left[x_i \ln\left(y_j + r_{ijk}\right) + y_j \ln\left(x_i + r_{ijk}\right) + z_k \arctan \frac{z_k r_{ijk}}{x_i y_j} \right],$$

où $x_i = x(n) - x'_i(m)$, $y_j = y(n) - y'_j(m)$, et $z_k = z(n) - z'_k(m)$.

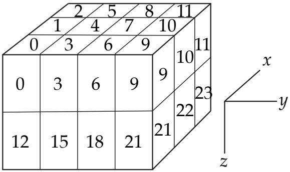
- *Remarquez l'absence du terme de densité.*

Système matriciel - Exercice

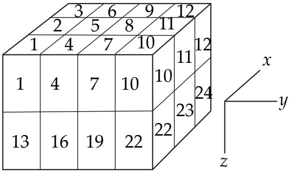
Gravimétrie
Théorie
Prisme rectangulaire droit
Polyèdre
Système matriciel
Magnétisme
Références
Annexes

Implémenter la construction de la matrice **G** pour une grille régulière (prismes rectangulaires droits)

- Pour construire le système matriciel, il faut se donner une convention pour numéroter les prismes ;
- Une convention possible est de faire varier
  - d'abord le numéro de ligne (indice i selon l'axe des x),
  - ensuite le numéro de colonne (indice j selon l'axe des y),
  - finalement le numéro de couche (indice k selon l'axe des z).



Python



MATLAB

Système matriciel - Exercice

- Dans votre fichier `gravi.py`, créez une classe `Grille` pour gérer des grilles régulières (prismes rectangulaires droits)
    - La taille de la grille est de $n_x \times n_y \times n_z$ prismes
- Le constructeur sera

```
class Grille:
    def __init__(self, x, y, z):
    """
    Input
     x: coordonnées des noeuds selon x (nx+1 x 1)
     y: coordonnées des noeuds selon y (ny+1 x 1)
     z: coordonnées des noeuds selon z (nz+1 x 1)
    """
        self.x = x
        self.y = y
        self.z = z
```

- Définissez une méthode `ind` qui retourne l'indice m d'un prisme dans la grille, à partir de ses indices (i, j, k)

Système matriciel - Exercice

- Ajoutez finalement à votre classe `Grille` une méthode `prd_G`, qui utilise votre fonction `prd`, pour construire la matrice **G**

```
def prd_G(self, x0):
    """
    PRD_G - Opérateur direct gravimétrique pour une
            grille de prismes rectangulaires droits

    G = prd_G(x0)

    Input
        x0: coordonnées des points d'observation (N x 3)

    Output
        G: opérateur direct (array numpy N x M)
    """
```

Système matriciel - Exercice

- Testez votre fonction avec les commandes

```
g = Grille(x=np.arange(-8.5,9.0),
           y=np.arange(-10.5,11.0),
           z=np.arange(10.0))

x0 = np.array([[0.0, 0.0, 0.0],
               [1.0, 0.0, 0.0],
               [2.0, 0.0, 0.0]])

tic = time.time()
G = g.prd_G(x0)
t_G = time.time() - tic

rho = np.zeros((g.nc,))
rho[ g.ind(8,10,5) ] = 1.0

tic = time.time()
gz = np.dot(G, rho)
t_mult = time.time() - tic

print(t_G, t_mult)
```

Magnétisme

Équations de Maxwell

- Le problème direct en magnétisme est solutionné en partant des équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{20}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{21}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{23}$$

où

- $\mathbf{B}$ est le champ d'induction ;
- $\mathbf{H}$ est le champ magnétique ;
- $\mathbf{D}$ est le champ de déplacement ;
- $\mathbf{E}$ est le champ électrique ;
- ρ est la densité de charge ;
- $\mathbf{J}$ est la densité de courant électrique.

Équations constitutives

- Les grandeurs électrique **D** et **E** ainsi que les grandeurs magnétiques **B** et **H** sont liées par les équations constitutives :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{24}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \mathbf{M} \right) \tag{25}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{26}$$

où

- ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide ;
- μ_o est la perméabilité du vide ;
- σ est la conductivité électrique ;
- **P** est la polarisation ;
- **M** est l'aimantation.

Équations constitutives

- Dans les matériaux linéaires isotropes sans pertes, **P** et **M** sont des fonctions linéaires de **E** et **H** respectivement, i.e.

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} \tag{27}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} \tag{28}$$

  avec ϵ_r la permittivité relative et μ_r la perméabilité relative.

- Si le milieu est anisotrope (et linéaire sans pertes), ϵ_r et μ_r deviennent les tenseurs $\overline{\overline{\epsilon}}_r$ et $\overline{\overline{\mu}}_r$:

$$\overline{\overline{\epsilon}}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\overline{\overline{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Unités SI

- En unités SI,
  - **B** est exprimé en tesla (T) ou weber/m^2 ;
  - **H** est exprimé en A/m ;
  - μ_o vaut $4\pi \times 10^{-7}$ (henry/m).
  - χ est la susceptibilité (sans dimension).
- Dans le vide (ou dans l'air)

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}. \tag{31}$$

- Si la matière est polarisable, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) && (32) \\ &= \mu_o(\mathbf{H} + \chi\mathbf{H}) && (33) \\ &= \mu_o(1 + \chi)\mathbf{H} && (34) \\ &= \mu\mathbf{H}, && (35) \\ \mu &= \mu_o(1 + \chi) && (36) \end{aligned}$$

  - χ est la susceptibilité (sans dimension).

Unités SI

Gravimétrie
Magnétisme
Équations de Maxwell
Modèle linéaire
Volumes finis
Références
Annexes

- Si la matière possède une aimantation rémanente, elle s'ajoute à l'aimantation induite.
- L'aimantation totale $\mathbf{M}$ vaut

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_r && (37) \\ &= \chi\mathbf{H} + \mathbf{M}_r && (38) \end{aligned}$$

  où l'aimantation induite est $\mathbf{M}_i$ et l'aimantation rémanente est $\mathbf{M}_r$.
- Le tableau du lien suivant présente les unités en magnétisme : `http://www.ieeemagnetics.org/index.php?option=com_content&view=article&id=118&Itemid=107`

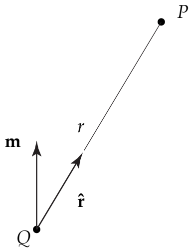
Théorie - Modèle linéaire

- Une approche simple et rapide consiste à considérer qu'un corps aimanté peut être représenté par une somme de moments dipolaires $\mathbf{m}_i$. i.e.

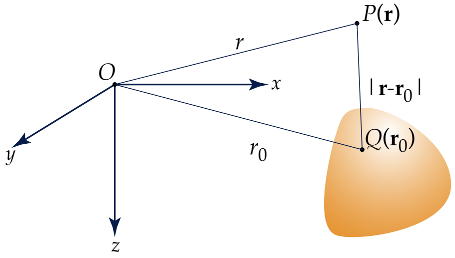
$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i. \tag{39}$$

- Cette approche suppose que les moments magnétiques sont faibles et n'interagissent pas entre eux.
- Le potentiel magnétique d'un moment dipolaire est

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{40}$$



Théorie - Modèle linéaire



- Le champ magnétique d'un corps aimanté de volume V, observé au point P est

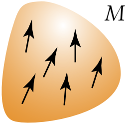
$$\mathbf{B} = -\nabla V = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \mathrm{d}v, \qquad (41)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $\mathbf{M}$ est l'aimantation du corps, et $\mathbf{r}_0$ est la position de l'élément de volume $\mathrm{d}v$.

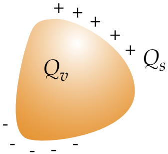
INRS Institut national de la recherche scientifique

Théorie - Modèle linéaire

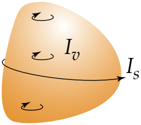
- L'aimantation du corps peut être considérée selon différents modèles



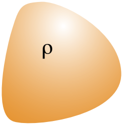
Volume d'aimantation



Charges surfaciques et volumiques



Courants surfaciques et volumiques



Relation de Poisson

Théorie - Volume d'aimantation

- Le modèle du volume d'aimantation s'avère pratique si on peut décomposer le corps en éléments de volume de faibles dimensions (comparativement à la distance au pt d'observation).
- Un i^e élément de volume V_i peut être vu comme un dipôle de moment magnétique

$$\mathbf{m}_i = V_i \chi_m \mathbf{H}, \tag{42}$$

où χ_m est sa susceptibillité magnétique et $\mathbf{H}$ est le champ magnétique terrestre.
- Comme on a vu, l'aimantation du corps vaut

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i.$$

Théorie - Volume d'aimantation

- Le champ magnétique d'un dipôle $\mathbf{m}_i$ à une distance $\mathbf{r}_i$ du point d'observation est

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\left(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i\right) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right]. \tag{43}$$

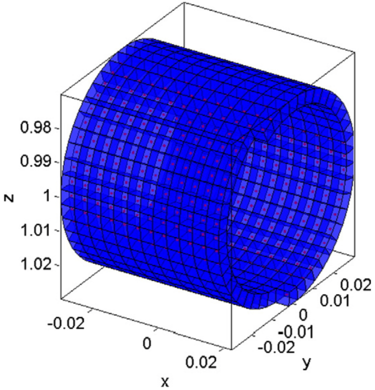
- Le champ mesuré à ce point d'observation est

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{B}_i + \mu_0 \mathbf{H}, \tag{44}$$

où N est le nombre de dipôles.

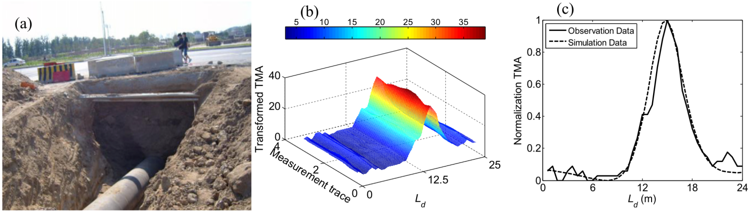
Exemple - Volume d'aimantation

- Guo *et al.* (2015) ont utilisé l'approche du volume d'aimantation pour modéliser la réponse de conduits ferreux.
- Le conduit est discrétisé de sections cylindriques divisées en éléments :



Exemple - Volume d’aimantation

- La démagnétisation est prise en compte en ajustant la susceptibilité en fonction d’un facteur de démagnétisation (voir en annexe) choisi de façon *ad hoc*.
- La réponse d’un conduit réel a pu être reproduite :



Théorie - Volumes finis

- Le modèle du corps aimanté vu précédemment suppose que le champ induit est faible par rapport au champ primaire.
- Cette approximation n'est pas valide lorsque la susceptibilité est élevée, en particulier en présence de démagnétisation.
- Une solution basée sur les équations de Maxwell permet de tenir compte adéquatement des champs induits.
- La méthode des volumes finis (VF) permet de résoudre les équations de Maxwell pour le problème magnétostatique :
  - En l'absence de charges libres et de source de courant électrique et lorsqu'il n'y a pas de variation temporelle des champs, nous avons

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{45}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{46}$$

  - La relation $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ est toujours valide.

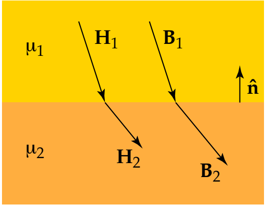
Théorie - Volumes finis

- Avec la méthode des VF, le domaine est discrétisé en voxels à l'intérieur desquels la perméabilité μ est constante, mais où μ varie d'un voxel à l'autre.
- À l'interface entre deux voxels, *la composante tangentielle du champ* $\mathbf{H}$ *est continue* :

$$\mathbf{H}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ce qui implique} \quad \mu_1^{-1}\mathbf{B}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mu_2^{-1}\mathbf{B}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \tag{47}$$

- La *composante normale de l'induction* $\mathbf{B}$ *est également continue* :

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{ce qui implique} \quad \mu_1\mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mu_2\mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{48}$$



Théorie - Volumes finis

- L'équation (45) permet d'exprimer le champ magnétique en fonction d'un potentiel scalaire ϕ, par

$$\mathbf{H} = \nabla\phi. \tag{49}$$

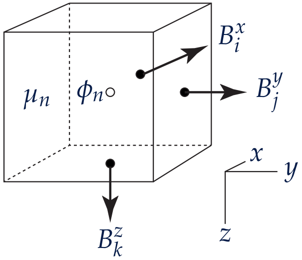
- L'équation (49), exprimée en terme de $\mathbf{B}$ et μ,

$$\mathbf{B} = \mu\nabla\phi \tag{50}$$

  ainsi que les équations (46) et (48) seront discrétisées pour construire le système numérique à résoudre.

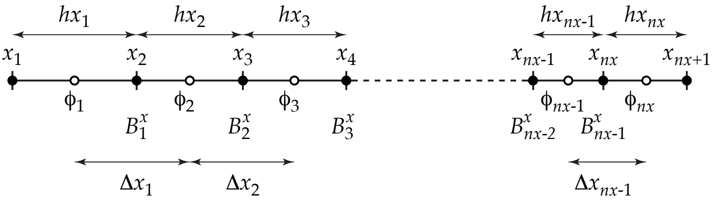
- L'approche présentée dans la suite est tirée de Lelièvre (2003).

Théorie - Volumes finis



- Le système discret repose sur une grille décalée :
  - les composantes du champ sont situées aux centres des faces du voxels ;
  - le potentiel scalaire est localisé au centre du voxel.
- Ce schéma permet de respecter les conditions de continuités aux interfaces et de calculer la dérivée de ϕ avec un opérateur de différence finie centrée.

Théorie - Volumes finis



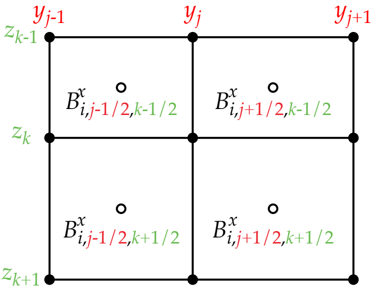
- Le domaine est divisé en $nc = nx \times ny \times nz$ voxels.
- Les coordonnées de noeuds sont

$$x_i : x_1, x_2, x_3, \dots, x_{nx+1} \tag{51}$$

$$y_j : y_1, y_2, y_3, \dots, y_{ny+1} \tag{52}$$

$$z_k : z_1, z_2, z_3, \dots, x_{nz+1} \tag{53}$$

Théorie - Volumes finis



- Sur la face x_i, les indices sont décalés en y et z pour le champ B^x ;
- Un jeu similaire survient pour B^y et B^z.

Théorie - Volumes finis

- La longueur des côtés des voxels est

$$hx_i : hx_1, hx_2, \dots, hx_{nx} \quad ; \quad hx_i = x_{i+1} - x_i \tag{54}$$

$$hy_j : hy_1, hy_2, \dots, hy_{ny} \quad ; \quad hy_j = y_{j+1} - y_j \tag{55}$$

$$hz_k : hz_1, hz_2, \dots, hz_{nz} \quad ; \quad hz_k = z_{k+1} - z_k \tag{56}$$

- Les coordonnées des centres des voxels sont

$$x_{i+1/2} : x_{1+1/2}, x_{2+1/2}, \dots, x_{nx+1/2} \tag{57}$$

$$y_{j+1/2} : y_{1+1/2}, y_{2+1/2}, \dots, y_{ny+1/2} \tag{58}$$

$$z_{k+1/2} : z_{1+1/2}, z_{2+1/2}, \dots, x_{nz+1/2} \tag{59}$$

- La distance entre les centres des voxels est

$$\Delta x_i : \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{nx-1} \quad ; \quad \Delta x_i = x_{i+3/2} - x_{i+1/2} = (hx_i + hx_{i+1})/2 \tag{60}$$

$$\Delta y_j : \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{ny-1} \quad ; \quad \Delta y_j = y_{j+3/2} - y_{j+1/2} = (hy_j + hy_{j+1})/2 \tag{61}$$

$$\Delta z_k : \Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_{nz-1} \quad ; \quad \Delta z_k = z_{k+3/2} - z_{k+1/2} = (hz_k + hz_{k+1})/2 \tag{62}$$

Théorie - Volumes finis

- La solution du problème est obtenue en déterminant les valeurs de ϕ et $\mathbf{B}$ sur tout le domaine.
  - ϕ doit être évalué aux nc voxels ;
  - B^x doit être évalué aux $(nx+1)\times ny \times nz$ faces avec un vecteur normal selon x ;
  - B^y doit être évalué aux $nx \times (ny+1)\times nz$ faces avec un vecteur normal selon y ;
  - B^z doit être évalué aux $nx \times ny \times (nz+1)$ faces avec un vecteur normal selon z.
- Conditions aux frontières pratiques : poser que $\mathbf{B}$ aux limites du domaine est égal au champ terrestre ambiant ;
  - Il faut dans ce cas définir une zone tampon autour du domaine où χ est égal à zéro, de façon à ce que le champ induit soit négligeable aux frontières.
  - Les valeurs de $\mathbf{B}$ doivent alors être déterminées seulement sur les faces intérieures
  - Le nombre total d'inconnues pour $\mathbf{B}$ est ainsi

$$nf = \underbrace{(nx-1)\times ny \times nz}_{nfx} + \underbrace{nx \times (ny-1)\times nz}_{nfy} + \underbrace{nx \times ny \times (nz-1)}_{nfz}. \quad (63)$$

Théorie - Volumes finis

- Créez une classe `GrilleVF` en vous basant sur votre classe `Grille`
- Ajoutez les attributs suivants
  - `hx,hy,hz` contenant les longueurs des côtés des voxels;
  - `xc,yc,zc` contenant les coordonnées des centres des voxels;
  - `dx,dy,dz` contenant les distances entre les centres des voxels;
  - Ajoutez aussi des attributs pour $nx, ny, nz, nc, nfx, nfy, nfz, nf$
- Modifiez finalement la méthode `ind` pour que `i`, `j` et `k` puisse contenir chacun plusieurs indices.
  - Les indices retournés doivent être classés en ordre croissant;
  - Vérifiez que les indices sont à l'intérieur de la grille.

Théorie - Volumes finis

- Une discrétisation par volumes finis est une discrétisation de la formulation faible de l'équation aux dérivées partielles.
  - Qu'est-ce qu'une formulation faible implique ?
- Avec cette discrétisation, l'espace est décomposé en petits "volumes finis", qui correspondent aux voxels de la grille.
- Sur ces volumes, les équations devant être discrétisées sont

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, \mathrm{d}v = 0 \tag{64}$$

$$\int_V \mathbf{B}\, \mathrm{d}v = \int_V \mu \nabla \phi\, \mathrm{d}v \quad \text{ou} \quad \int_V \mu^{-1} \mathbf{B}\, \mathrm{d}v = \int_V \nabla \phi\, \mathrm{d}v. \tag{65}$$

Théorie - Volumes finis

- L'approximation discrète de l'équation (64) est obtenue par le théorème de divergence

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, \mathrm{d}v = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}s = 0$$

- En posant un flux sortant positif, la forme discrète de l'intégrale de surface devient, pour le voxel (i, j, k)

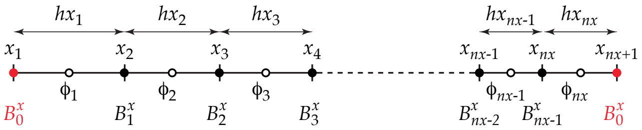
$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}s \approx & \left(B^x_{i,j+1/2,k+1/2} - B^x_{i-1,j+1/2,k+1/2}\right) hy_j hz_k \\ & + \left(B^y_{i+1/2,j,k+1/2} - B^y_{i+1/2,j-1,k+1/2}\right) hx_i hz_k \\ & + \left(B^z_{i+1/2,j+1/2,k} - B^z_{i+1/2,j+1/2,k-1}\right) hx_i hy_j = 0 \qquad (66)\end{aligned}$$

Théorie - Volumes finis

- On divisant (66) par le volume du voxel, on obtient nc équations de la forme

$$\left(B^x_{i,j+1/2,k+1/2} - B^x_{i-1,j+1/2,k+1/2}\right)/hx_i + \left(B^y_{i+1/2,j,k+1/2} - B^y_{i+1/2,j-1,k+1/2}\right)/hy_j + \left(B^z_{i+1/2,j+1/2,k} - B^z_{i+1/2,j+1/2,k-1}\right)/hz_k = 0 \quad (67)$$

- Les conditions aux limites complètent la discrétisation.
- On pose que partout aux limites du domaine le champ vaut $\mathbf{B}_0 = (B^x_0, B^y_0, B^z_0)$.



Théorie - Volumes finis

- Pour un voxel sur une face où $i = 1$, nous avons une équation de la forme

$$
\begin{aligned}
& B^x_{1,j+1/2,k+1/2}/hx_1 \\
& + \left(B^y_{i+1/2,j+1,k+1/2} - B^y_{i+1/2,j,k+1/2}\right)/hy_j \\
& + \left(B^z_{i+1/2,j+1/2,k+1} - B^z_{i+1/2,j+1/2,k}\right)/hz_k = B^x_0/hx_1.
\end{aligned} \tag{68}
$$

- Pour un voxel sur une face où $i = nx$, nous avons

$$
\begin{aligned}
& -B^x_{nx-1,j+1/2,k+1/2}/hx_{nx} \\
& + \left(B^y_{i+1/2,j+1,k+1/2} - B^y_{i+1/2,j,k+1/2}\right)/hy_j \\
& + \left(B^z_{i+1/2,j+1/2,k+1} - B^z_{i+1/2,j+1/2,k}\right)/hz_k = -B^x_0/hx_{nx}.
\end{aligned} \tag{69}
$$

Théorie - Volumes finis

- Sur une arête (e.g. où $i = 1$ et $j = 1$), nous avons une expression de la forme

$$\begin{aligned} & B^x_{i,j+1/2,k+1/2}/hx_i + B^y_{i+1/2,j,k+1/2}/hy_j \\ & \quad + \left(B^z_{i+1/2,j+1/2,k+1} - B^z_{i+1/2,j+1/2,k} \right)/hz_k = B^x_0/hx_i + B^y_0/hy_j. \end{aligned} \tag{70}$$

- Sur un coin (e.g. $i = 1$, $j = 1$ et $k = 1$), nous avons une équation de la forme

$$\begin{aligned} & B^x_{i,j+1/2,k+1/2}/hx_i + B^y_{i+1/2,j,k+1/2}/hy_j + \\ & \qquad B^z_{i+1/2,j+1/2,k}/hz_k = B^x_0/hx_i + B^y_0/hy_j + B^z_0/hz_k. \end{aligned} \tag{71}$$

Théorie - Volumes finis

- En combinant les équations précédentes, il est possible de construire le système matriciel

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q} \tag{72}$$

où $\mathbf{D}$ est de taille $nc \times nf$, $\mathbf{B}$ de taille $nf \times 1$ et où $\mathbf{q}$ est de taille $nc \times 1$ et contient les termes provenant des conditions aux frontières.

- $\mathbf{D}$ est appelée matrice de divergence.
- Le système matriciel peut être séparé de telle sorte que

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q} \tag{73}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D_x} & \mathbf{D_y} & \mathbf{D_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B_x} \\ \mathbf{B_y} \\ \mathbf{B_z} \end{bmatrix} = \mathbf{q} \tag{74}$$

$$\mathbf{D_x B_x} + \mathbf{D_y B_y} + \mathbf{D_z B_z} = \mathbf{q}. \tag{75}$$

Théorie - Volumes finis

- La matrice $\mathbf{D_x}$ est construite selon

$$\mathbf{D_x} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_\mathbf{x} & & & \\ & \widetilde{\mathbf{D}}_\mathbf{x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \widetilde{\mathbf{D}}_\mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{76}$$

où

$$\widetilde{\mathbf{D}}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} hx_1^{-1} & & & \\ -hx_2^{-1} & hx_2^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -hx_{nx-1}^{-1} & hx_{nx-1}^{-1} \\ & & & -hx_{nx}^{-1} \end{bmatrix} \tag{77}$$

- La diagonale principale et la -1^e diagonale de $\widetilde{\mathbf{D}}_\mathbf{x}$ sont remplies. $\widetilde{\mathbf{D}}_\mathbf{x}$ est de taille $nx \times (nx-1)$, et est répétée $ny \times nz$ fois pour créer $\mathbf{D_x}$.

Théorie - Volumes finis

- Ajoutez une méthode `fabrique_D` à la classe `GrilleVF`, pour construire la matrice $\mathbf{D_x}$.
- $\mathbf{D_x}$ devra être une matrice *creuse*.
  - Consultez la documentation du module `sparse` de la librairie `scipy`;
  - La forme la plus simple à utiliser est `coo_matrix`;

Théorie - Volumes finis

- $\mathbf{D_y}$ est construite de façon similaire avec

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} hy_1^{-1} & & & & & & \\ 0 & hy_1^{-1} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & hy_1^{-1} & & & \\ -hy_2^{-1} & & & & hy_2^{-1} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -hy_{ny-1}^{-1} & & & & hy_{ny-1}^{-1} \\ & & & -hy_{ny}^{-1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -hy_{ny}^{-1} \end{bmatrix} \tag{78}$$

- La diagonale principale et la $-nx^e$ diagonale sont remplies. $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{y}}$ est de taille $nx * ny \times nx * (ny - 1)$, et est répétée nz fois pour créer $\mathbf{D_y}$.

- Ajoutez la construction de la matrice $\mathbf{D_y}$ à votre méthode `fabrique_D`.
- $\mathbf{D_y}$ devra également être une matrice creuse.

Théorie - Volumes finis

- $\mathbf{D_z}$ contient des éléments sur la diagonale principale et la $-nx * ny^e$ diagonale :

$$\mathbf{D_z} = \begin{bmatrix} hz_1^{-1} & & & & & \\ 0 & hz_1^{-1} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ -hz_2^{-1} & & & hz_2^{-1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -hz_{nz-1}^{-1} & & & hz_{nz-1}^{-1} \\ & & & -hz_{nz}^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -hz_{nz}^{-1} \end{bmatrix} \tag{79}$$

Théorie - Volumes finis

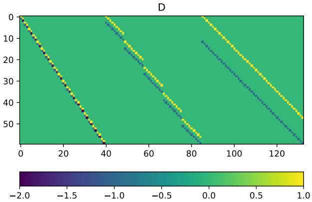
- Ajoutez finalement la construction de $\mathbf{D_z}$ (creuse) à votre méthode `fabrique_D` et assemblez la matrice $\mathbf{D}$
- `fabrique_D` doit retourner $\mathbf{D}$.
- Ajoutez également une méthode `fabrique_q` pour construire le vecteur $\mathbf{q}$;
  - Cette méthode doit avoir pour argument `B0` (un vecteur contenant les trois composantes du champ ambiant.

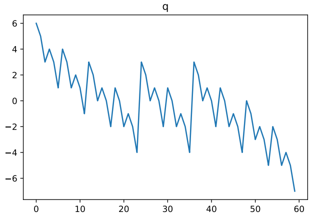
Théorie - Volumes finis

- Testez votre code avec :

```
x = [1, 2, 3, 3.5]
y = [1, 2, 3, 4, 5]
z = np.arange(6)
B0 = np.array([1., 2., 3.])
gvf = GrilleVF(x, y, z)
D = gvf.fabrique_D()
q = gvf.fabrique_q(B0)
```

- Vous devriez obtenir :





Théorie - Volumes finis

- Pour discrétiser l'équation (65), il est nécessaire de connaître μ (ou μ^{-1}) sur les faces des voxels.
- En interpolant μ, on obtient sa moyenne arithmétique alors qu'en interpolant μ^{-1} on obtient la moyenne harmonique de μ.
  - La moyenne harmonique est plus représentative de la perméabilité effective ;
  - Pour des cellules de tailles différentes, la moyenne harmonique μ_m selon x vaut

$$\mu_m = 2\Delta x \left(\frac{hx_1}{\mu_1} + \frac{hx_2}{\mu_2} \right)^{-1}. \tag{80}$$

- On discrétise donc $\mu^{-1}\mathbf{B} = \nabla\phi$, qui est séparé en trois parties :

$$\mu^{-1}B_x = \nabla_x\phi \tag{81}$$
$$\mu^{-1}B_y = \nabla_y\phi \tag{82}$$
$$\mu^{-1}B_z = \nabla_z\phi. \tag{83}$$

Théorie - Volumes finis

- Le volume d'intégration couvre une face du voxel de sorte que l'induction B est au centre du volume, i.e. en x

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{B_x}{\mu} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \nabla_x \phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{84}$$

- Si on assume que B_x ne varie pas à l'intérieur du volume d'intégration, on peut le sortir de l'intégrale triple.
- La forme discrète, après avoir divisé par le volume d'intégration, est

$$\frac{B^x_{i,j+1/2,k+1/2}}{2\Delta x_i}\left(\frac{hx_i}{\mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{hx_{i-1}}{\mu_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}\right) = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_i} \tag{85}$$

Théorie - Volumes finis

- La notation est allégée en posant

$$\eta^x_{i,j+1/2,k+1/2} = 2\Delta x_i \left(\frac{hx_i}{\mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}} + \frac{hx_{i-1}}{\mu_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}} \right)^{-1} \quad (86)$$

ce qui donne

$$\frac{B^x_{i,j+1/2,k+1/2}}{\eta^x_{i,j+1/2,k+1/2}} = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{\Delta x_i} \quad (87)$$

- On peut maintenant construire une système matriciel de la forme

$$\mathbf{M_x}^{-1}\mathbf{B_x} = \mathbf{G_x}\boldsymbol{\phi} \quad \text{ou} \quad \mathbf{B_x} = \mathbf{M_x}\mathbf{G_x}\boldsymbol{\phi} \quad (88)$$

où $\mathbf{M_x}$ est une matrice diagonale contenant les coefficients $\eta^x_{i,j+1/2,k+1/2}$.

Théorie - Volumes finis

- En procédant de façon similaire selon y et z, on arrive à un système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B_x} \\ \mathbf{B_y} \\ \mathbf{B_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M_y} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G_x} \\ \mathbf{G_y} \\ \mathbf{G_z} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \tag{89}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \quad \mathbf{G} \quad \boldsymbol{\phi}$$

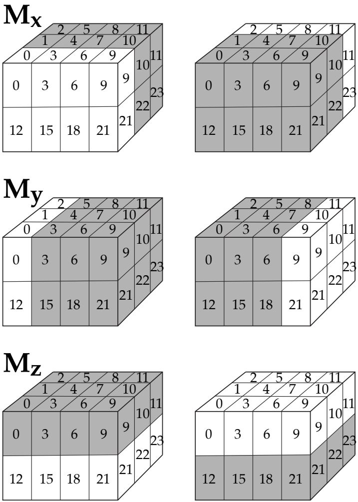
- $\mathbf{G}$ est appelée matrice de gradient (de taille $nf \times nc$);
- $\mathbf{M}$ est appelée matrice des perméabilité (de taille $nf \times nf$);
- $\boldsymbol{\phi}$ est le vecteur du potentiel magnétique (de taille $nc \times 1$).

Théorie - Volumes finis

- **M** est construite suivant

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \eta_1^x & & & & & & & & & \\ & \eta_2^x & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \eta_{(nx-1)ny\,nz}^x & & & & & & \\ & & & & \eta_1^y & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \eta_{nx(ny-1)nz}^y & & & \\ & & & & & & & \eta_1^z & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \eta_{nx\,ny(nz-1)}^z \end{bmatrix} \tag{90}$$

Théorie - Volumes finis



Construction des matrices $\mathbf{M_x}$, $\mathbf{M_y}$ et $\mathbf{M_z}$

- Il faut choisir soigneusement les indices des voxels

Théorie - Volumes finis

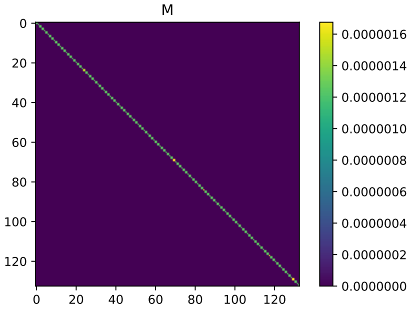
- Créez une méthode `fabrique_M` pour construire la matrice $\mathbf{M}$ contenant les valeurs de la moyenne harmonique de μ.
- Votre méthode aura pour argument `mu`, un vecteur de nc éléments contenant les valeurs de perméabilité des voxels.
- Notez que $\mathbf{M}$ est également une matrice creuse.

Théorie - Volumes finis

- Testez votre code avec :

```
chi = np.zeros((gvf.nc,))
chi[gvf.ind(2,2,3)] = 1.0
mu0 = 4 * math.pi * 1.e-7;
mu = mu0 * (1.+chi)
M = gvf.fabrique_M(mu)
```

- Vous devriez obtenir :



Théorie - Volumes finis

- Par ailleurs,

$$\mathbf{G_x} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{x} & & & \\ & \widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{91}$$

$$\widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\Delta x_1^{-1} & \Delta x_1^{-1} & & & \\ & -\Delta x_2^{-1} & \Delta x_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\Delta x_{nx-1}^{-1} & \Delta x_{nx-1}^{-1} \end{bmatrix} \tag{92}$$

- La diagonale principale et la première diagonale sont remplies.
- $\widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{x}$ est de taille $(nx-1) \times nx$ et répétée $ny * nz$ fois, ce qui fait que $\mathbf{G_x}$ est de taille $nfx \times nc$.

Théorie - Volumes finis

- Également,

$$\mathbf{G_y} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{y} & & & \\ & \widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{y} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{93}$$

$$\widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\Delta y_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta y_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ & & -\Delta y_1^{-1} & & & & \Delta y_1^{-1} & & & \\ & & & -\Delta y_2^{-1} & & & & \Delta y_2^{-1} & & \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & & -\Delta y_{ny-1}^{-1} & & & & \Delta y_{ny-1}^{-1} \end{bmatrix} \tag{94}$$

- La diagonale principale et la nx^e diagonale sont remplies.
- $\widetilde{\mathbf{G}}_\mathbf{y}$ est de taille $nx * (ny-1) \times nx * ny$ et répétée nz fois, ce qui fait que $\mathbf{G_y}$ est de taille $nfy \times nc$.

Théorie - Volumes finis

- Finalement,

$$\mathbf{G_z} = \begin{bmatrix} -\Delta z_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta z_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ & & -\Delta z_1^{-1} & & & & \Delta z_1^{-1} & & & \\ & & & -\Delta z_2^{-1} & & & & \Delta z_2^{-1} & & \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & & -\Delta z_{nz-1}^{-1} & & & & \Delta z_{nz-1}^{-1} \end{bmatrix} \tag{95}$$

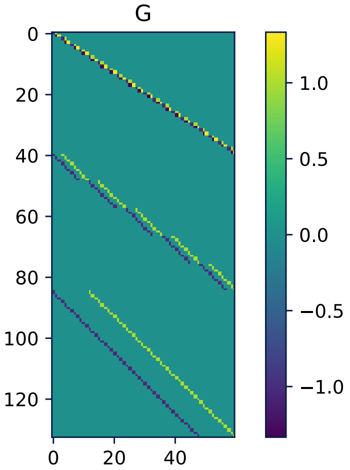
- La diagonale principale et la $(nx * ny)^e$ diagonale sont remplies, et $\mathbf{G_z}$ est de taille $nfz \times nc$.

Théorie - Volumes finis

- Écrivez finalement une méthode `fabrique_G` pour construire la matrice $\mathbf{G}$ contenant les opérateurs du gradient de ϕ.
- Comme pour les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$ doit être creuse.

Théorie - Volumes finis

- Vous devriez obtenir :



- Testez votre code avec :

```
G = gvf.fabrique_G()
```

Théorie - Volumes finis

- Les équations vues jusqu'à présent permettent de calculer le champ total $\mathbf{B}$.
- Nous avons les équations (72)

$$\mathbf{DB} = \mathbf{q}$$

et (89)

$$\mathbf{B} = \mathbf{MG}\boldsymbol{\phi}$$

- On résoud le système pour $\boldsymbol{\phi}$ en insérant les conditions aux limites, i.e.

$$\underbrace{\mathbf{DMG}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}}$$

- On utilise (89) pour finalement calculer $\mathbf{B}$.

Théorie - Volumes finis

- Il est souvent souhaitable de ne modéliser que le champ induit (ou secondaire) par la présence de corps magnétisables, i.e. de calculer l'anomalie magnétique (notée $\mathbf{B_s}$).
- Il est possible d'extraire l'anomalie du champ total en soustrayant à ce dernier la valeur du champ ambiant $\mathbf{B}_0$, i.e.

$$\mathbf{B_s} = \mathbf{B} - \mathbf{B_0}. \tag{96}$$

  - Cette approche peut être sujette aux erreurs d'arrondi car le champ secondaire est souvent plus faible que $\mathbf{B}_0$ par plusieurs ordres de grandeur .

Théorie - Volumes finis

- Il est possible de calculer directement le champ secondaire et de limiter les erreurs d'arrondi.
- Il suffit de décomposer les équations (72) et (89) selon

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{B_0} + \mathbf{B_s}\right) = \mathbf{f} + \mathbf{g} \tag{97}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{B_0} + \mathbf{B_s}\right) = \mathbf{G}\left(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\phi}_\mathbf{s}\right). \tag{98}$$

- Le vecteur $\mathbf{f}$ est équivalent au vecteur $\mathbf{q}$ de l'équation (72), i.e. il est calculé à partir de $\mathbf{B_0}$ sur le pourtour du domaine.
- Le vecteur $\mathbf{g}$ est similaire à $\mathbf{f}$, mais est dû au champ induit $\mathbf{B_s}$ plutôt que $\mathbf{B_0}$.
  - Si les corps magnétiques sont loin des bords du domaine, on peut assumer que $\mathbf{B_s}$ sera très faible au pourtour du domaine et donc que $\mathbf{g} \approx 0$.

Théorie - Volumes finis

- Pour le champ primaire, nous avons ainsi

$$\mathbf{D}\mathbf{B_0} = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathbf{M_0}^{-1}\mathbf{B_0} = \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{0}. \tag{99}$$

- $\mathbf{M_0}$ a des éléments non-nuls seulement sur la diagonale principale et $\eta_0 = \mu_0$, ce qui fait que $\mathbf{M_0} = \mu_0\mathbf{I}$.
- Pour le champ secondaire, nous avons alors

$$\mathbf{D}\mathbf{B_s} = \mathbf{g} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B_s} &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B_0} + \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{0} + \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{s} \\ &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B_0} + \mathbf{M_0}^{-1}\mathbf{B_0} + \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{s} \\ &= \left(\mu_0^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\right)\mathbf{B_0} + \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{s}. \end{aligned} \tag{101}$$

Théorie - Volumes finis

- On a finalement que

$$\mathbf{B_s} = \left(\mu_0^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B_0} + \mathbf{MG}\boldsymbol{\phi}_\mathbf{s}, \tag{102}$$

où $\boldsymbol{\phi}_\mathbf{s}$ est obtenu en solutionnant

$$\underbrace{\mathbf{DMG}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\boldsymbol{\phi}_\mathbf{s}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{g} - \mathbf{D}\left(\mu_0^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B_0}}_{\mathbf{b}} \tag{103}$$

avec $\mathbf{B_0}$ un vecteur de la taille de $\mathbf{B}$ contenant les valeurs du champ ambiant.

  - La méthode du gradient biconjugué stabilisé peut être utilisée pour résoudre ce système.

Théorie - Volumes finis

- Comment calculer $\mathbf{g}$ alors que $\mathbf{B_s}$ est inconnu ?
- Lelièvre (2003) propose d'approximer les matériaux magnétiques dans le domaine par une sphère de susceptibilité égale à la moyenne volumique des susceptibilités des voxels ;
  - on peut ensuite calculer analytiquement la réponse de cette sphère au pourtour du domaine.
- La moyenne volumique ξ est

$$V = \sum_{i=0,\chi_i\neq 0}^{nc-1} v_i \qquad (104)$$

$$\xi = \frac{1}{V}\sum_{i=0}^{nc-1} \chi_i v_i \qquad (105)$$

où v_i est le volume du i^e voxel et χ_i est la susceptibilité de ce voxel.

Théorie - Volumes finis

- Pour une sphère de susceptibilité ξ, les facteurs de démagnétisattion sont $1/3$;
- Le moment dipolaire de la sphère est ainsi

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{B_0}}{\mu_0} \frac{\xi V}{1 + \frac{\xi}{3}}, \tag{106}$$

avec une magnitude m et une direction unitaire $\hat{\mathbf{m}}$.

- Le champ secondaire à un point P au pourtour du domaine est donc

$$\mathbf{B_s}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \left[3(\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{m}} \right], \tag{107}$$

où le vecteur pointe du centre de la sphère vers P.

Théorie - Volumes finis

- Le centre de la sphère est placé au "centre de susceptibilité" (x_c, y_c, z_c), calculé de façon similaire au centre de gravité, i.e.

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum^{nc} \chi_i x_i}{\sum^{nc} \chi_i} \\ y_c &= \frac{\sum^{nc} \chi_i y_i}{\sum^{nc} \chi_i} \\ z_c &= \frac{\sum^{nc} \chi_i z_i}{\sum^{nc} \chi_i} \end{aligned} \tag{108}$$

Théorie - Volumes finis

- La discrétisation du milieu en volumes finis entraîne une erreur.
- Pour évaluer l'ordre de grandeur cette erreur, partons de la série de Taylor à la surface d'un voxel en posant que les voxels sont cubiques de côté h :

$$\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = \phi_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h}{2}\phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h^2}{8}\phi''_{i,j+1/2,k+1/2} + \mathcal{O}(h^3) \quad (109)$$

$$\phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} = \phi_{i,j+1/2,k+1/2} - \frac{h}{2}\phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \frac{h^2}{8}\phi''_{i,j+1/2,k+1/2} - \mathcal{O}(h^3) \quad (110)$$

Théorie - Volumes finis

- En soustrayant les équations (109) et (110), on arrive à l'expression de l'opérateur de dérivé centrée suivant :

$$\frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{h} = \phi'_{i,j+1/2,k+1/2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (111)$$

- Or, **B** est évalué à partir du potentiel ϕ, i.e.

$$B^x_{i,j+1/2,k+1/2} = \eta_{i,j+1/2,k+1/2} \left(\frac{\phi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}}{h} \right), \quad (112)$$

  où $\eta_{i,j+1/2,k+1/2}$ est la moyenne harmonique des valeurs de perméabilité des voxels voisins à l'interface.
- La précision sur le calcul de **B** est donc de l'ordre de $\mathcal{O}(\eta_{\text{harm}} h^2)$.
  - L'erreur est donc proportionnelle à la perméabilité en plus de la taille des voxels au carré.

Théorie - Volumes finis

- Créez une méthode `fabrique_cf` à partir de votre méthode `fabrique_q` et ajoutez-y la construction du vecteur **g**
- Suivez pour ce faire l'approche proposée par Lelièvre à la section 4.2 de son mémoire (disponible à `http://circle.ubc.ca/handle/2429/13931`)
- Cette méthode aura pour arguments `B0` et `chi`

Théorie - Volumes finis

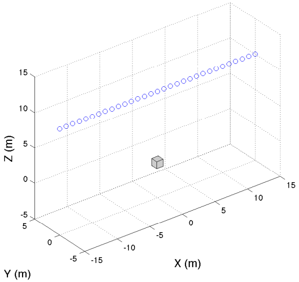
- Implémentez finalement une méthode pour modéliser la réponse magnétique pour une distribution spatiale donnée de la susceptibilité χ
- Définissez la méthode selon
  `def magmod(self, chi, B0, xo, usecl, chtot)`
  où
  - `xo` : points d'observation (`ndarray` de taille N×3)
  - `usecl` permet de préciser si $\mathbf{g}$ doit être considéré (booléen)
  - `chtot` indique s'il faut calculer le champ total ou $\mathbf{B_s}$ (booléen)
- La méthode doit retourner les valeurs de B_x, B_y et B_z interpolées aux points d'observation `xo`

Volumes finis – Exemple

- Calculez l'anomalie causée par un cube de 1 m^3, de susceptibilité $\chi = 0.01$, et situé au centre d'une grille de $33 \times 33 \times 33$ voxels (tous de 1 m^3 de volume), pour un champ ambiant $\mathbf{B}_0 = [0, 0, 10000]$ T.

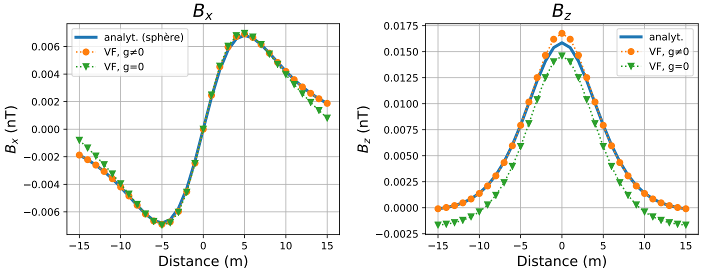
- Le centre du cube aimanté est à la coordonnée (0,0,0).
- Utilisez le solveur `bicgstab` avec les paramètres par défaut.
- Tracez un profil de B_x et un profil de B_z pour les points ayant pour coordonnées

```
xp=np.arange(-15.0,15.1)
yp=0
zp=10
```



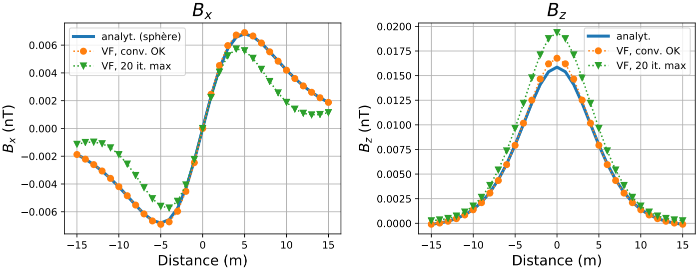
Volumes finis – Exemple

- Comparaison avec la solution analytique pour une sphère de volume égal à celui du cube.



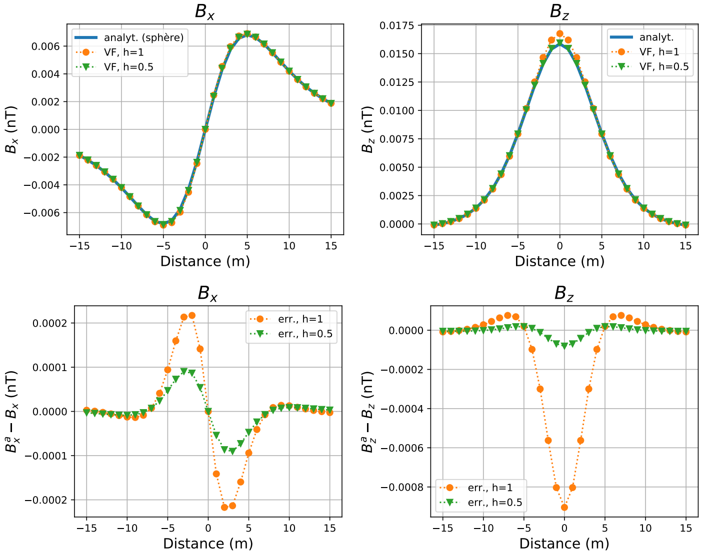
Volumes finis – Exemple

- Influence du choix des paramètres de convergence de `bicgstab`



Volumes finis – Exemple

- Influence de la taille des voxels



Références

Références

- Blakely, R. J. (1995). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press
- Guo, Z.-Y., Liu, D.-J., Pan, Q., and Zhang, Y.-Y. (2015). Forward modeling of total magnetic anomaly over a pseudo-2D underground ferromagnetic pipeline. *Journal of Applied Geophysics*, 113 :14 – 30
- Lelièvre, P. G. (2003). Forward modeling and inversion of geophysical magnetic data. Master's thesis, University of British Columbia

Références

- Li, X. and Chouteau, M. (1998). Three-dimentional gravity modeling in all space. *Surveys in Geophysics*, 19 :339–368
- Plouff, D. (1976). Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics*, 41 :727–741
- Singh, B. and Guptasarma, D. (2001). New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra. *Geophysics*, 66(2) :521–526

Annexes

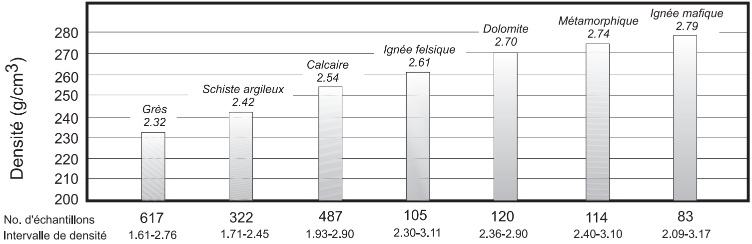
Densité ρ

- C'est la masse par unité de volume ;
- Unité habituelle : g / cm^3 ;
- Strictement parlant : masse volumique.
- Pour un milieu poreux saturé, la densité du mélange est

$$\rho_m = (1 - \phi)\,\rho_h + \phi\rho_f$$

  - ϕ est la porosité ;
  - ρ_h la densité de la matrice hôte ;
  - ρ_f est la densité du fluide.

Densité ρ


Densité (g/cm3)
280
270
260
250
240
230
220
210
200
Grès
2.32
Schiste argileux
2.42
Calcaire
2.54
Ignée felsique
2.61
Dolomite
2.70
Métamorphique
2.74
Ignée mafique
2.79
No. d'échantillons
617
322
487
105
120
114
83
Intervalle de densité
1.61-2.76
1.71-2.45
1.93-2.90
2.30-3.11
2.36-2.90
2.40-3.10
2.09-3.17

Propriétés magnétiques des roches

- Les roches sont un agencement de minéraux qui présentent des propriétés magnétiques différentes ;
- Les différents phénomènes en compétition :
  - diamagnétisme ;
  - paramagnétisme ;
  - ferromagnétisme ;
  - antiferromagnétisme ;
  - ferrimagnétisme.

L'atome

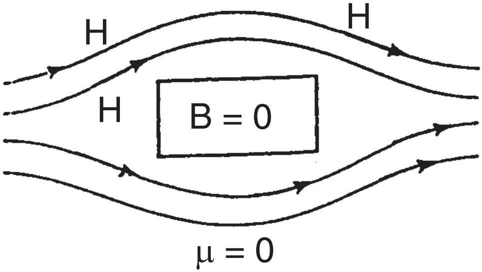
- Toutes les substances sont magnétiques à l'échelle de l'atome.
- Un atome se comporte comme un dipôle :
  - spin des électrons ;
  - orbite des électrons autour du noyau.
- Physique quantique : max. deux électrons par niveau si les spins sont opposés.
  - Si on a deux électrons par niveau (paire), les moments s'annulent.

Diamagnétisme

- Matière pour laquelle tout les niveaux atomiques sont remplis de paires d'électrons.
- Si on applique un champ $\mathbf{H}$:
  - la rotation des électrons s'oppose à $\mathbf{H}$;
  - la susceptibilité χ est ainsi négative ;
  - cet effet est de faible magnitude.
- Cette matière offre une «résistance» au champ magnétique.

Diamagnétisme

- Diamagnétisme parfait : le champ est nul à l'intérieur de l'objet.



Diamagnétisme

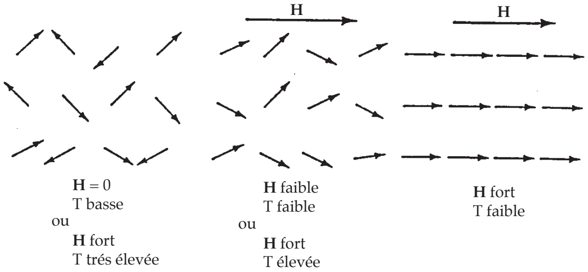
- Quelques roches & matériaux diamagnétiques :
  - graphite ;
  - gypse ;
  - quartz ;
  - sel ;
  - cuivre ;
  - diamant.

Paramagnétisme

- Les niveaux ne sont pas tous remplis :
  - un champ magnétique résulte du spin des électrons solitaires.
- Si on applique un champ $\mathbf{H}$:
  - les dipôles des électrons solitaires s'alignent avec $\mathbf{H}$;
  - la susceptibilité χ est positive ;
  - cette effet est de faible magnitude.

Paramagnétisme

- La température T influence le comportement de la matière.
- Une température élevée excite les atomes :
  - limite l'effet du champ **H**.



Paramagnétisme

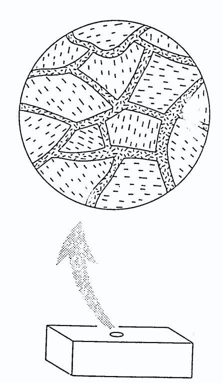
- Exemples de substances paramagnétiques :
  - la plupart des métaux ;
  - gneiss ;
  - dolomie ;
  - pegmatite ;
  - syénite.

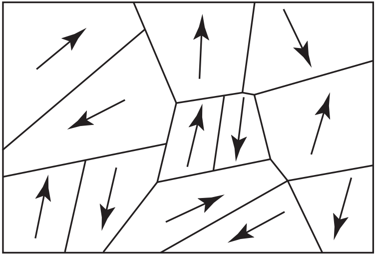
Ferromagnétisme

- Existe si, dans certains cristaux paramagnétiques, les moments atomiques sont alignés dans la même direction.
- Occurrence spontanée.
- Les régions où les moments sont alignés sont nommés domaines.
- Les limites entre les domaines sont nommées parois.
- Distribution aléatoire.

Ferromagnétisme

- Si **H** nul, la somme des moments est nulle.



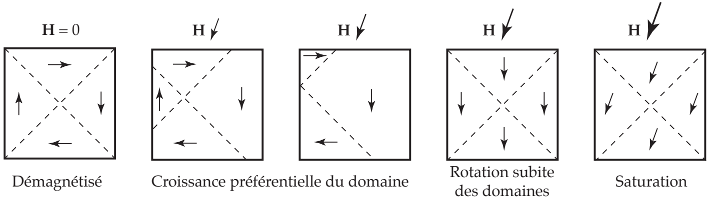


Ferromagnétisme

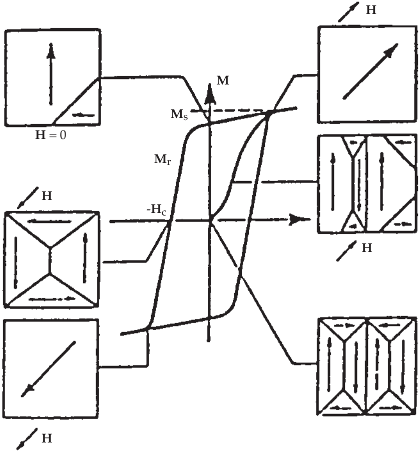
- Sous l'effet d'un **H** externe, les parois se déplacent ;
  - les domaines orientés selon **H** croissent ;
  - il y a augmentation de la magnétisation.
- Si l'intensité augmente, il y a rotation des domaines ;
  - augmentation accrue de la magnétisation.
- Donne lieu a des χ élevés.

Ferromagnétisme

- L'alignement des domaines donne lieu à une magnétisation importante (susceptibilité élevée).



Ferromagnétisme

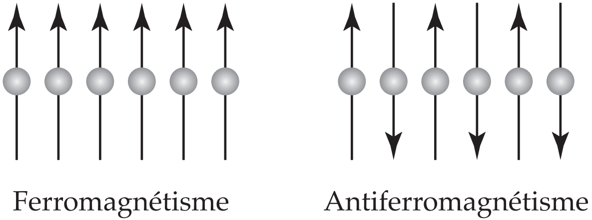


Ferromagnétisme

- Parmi les substances ferromagnétiques :
  - fer ;
  - cobalt ;
  - nickel.
- Si la température de la matière dépasse le point de Curie, celle-ci passe à l'état paramagnétique.

Antiferromagnétisme

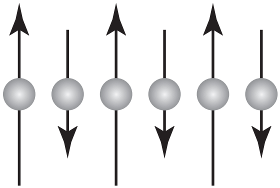
- Survient lorsque les dipôles au sein d'un cristal sont antiparallèles.



- La susceptibilité χ est très faible.
- L'hématite (Fe_2O_3) : exemple d'antiferromagnétisme.

Ferrimagnétisme

- Les dipôles sont antiparallèles, mais de magnitude différente ;
  - le moment net est non nul.
  - magnétite (Fe_3O_4), ilménite ($FeTiO_3$), titanomagnétite, oxydes de fer ou de fer et titane.
- Donne lieu a des χ élevés.



Ferrimagnétisme

Ferrimagnétisme

- Existe également si le nombre de dipôles d'une direction est supérieur au nombre dans l'autre direction ;
  - cas de la pyrrhotite.

Aimantation rémanente

- Une aimantation qui subsiste en l'absence de **H** est dite rémanente.
- Peut être causée par plusieurs mécanismes :
  - thermorémanence ;
  - aimantation dépositionnelle ou détritique ;
  - aimantation isotherme ;
  - aimantation visqueuse ;
  - aimantation chimique.

Aimantation rémanente

- Thermorémanence :
  - Une roche chauffée au dessus de son point de Curie ;
  - Ses dipôles vont s'aligner dans le sens du **H** ambiant en refroidissant ;
    - mémoire magnétique.
  - Une magnétisation subsiste à T ambiante ;
    - proportionnelle à **H** au refroidissement.

Aimantation rémanente

- Aimantation détritique :
  - lors de la dépositions des sédiments ;
  - les minéraux magnétiques s'alignent avec le **H** ambiant.
- Aimantation isotherme :
  - due aux **H** exceptionnellement élevés (foudre).
- Aimantation visqueuse ;
  - lent déplacement des domaines sous l'effet du **H** ambiant, à T ambiante.
- Aimantation chimique :
  - peut survenir lors d'une transformation cristalline, ou causée par diagénèse ou métamorphisme.

Aimantation rémanente

- L'intensité de l'aimantation rémanente $\mathbf{M}_r$ peut dépasser l'aimantation induite $\mathbf{M}_i$;
- Le rapport de Königsberger est défini comme $Q = \mathbf{M}_r / \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_r / \chi(\mathbf{H}/\mu_0)$;
- La direction de $\mathbf{M}_r$ n'est pas nécessairement la même que celle de $\mathbf{M}_i$
  - La résultante n'est plus alignée dans le champ $\mathbf{H}$ ambiant.

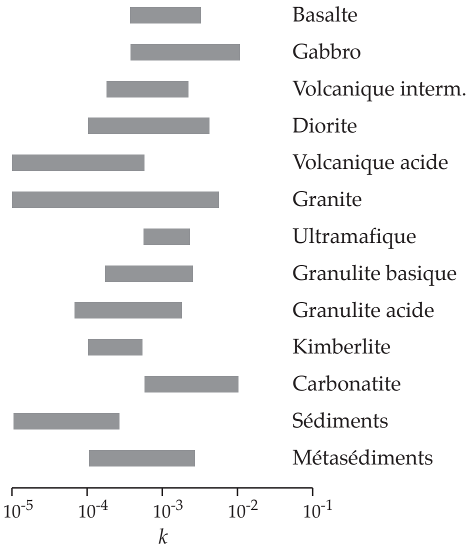
Aimantation rémanente

- Le rapport Q peut valoir
  - ≈ 1 pour les roches ignées (cristallisation lente) ;
  - ≈ 10 pour les roches volcaniques ;
  - ≈ 30-50 pour les roches basaltiques (cristallisation rapide) ;
  - < 1 pour les roches sédimentaires et métamorphique, sauf si Fe présent.

Magnétisme des roches

- La plupart des minéraux ont une χ faible ;
- La nature magnétique d'une roche est due à une petite quantité de minéraux magnétiques ;
- Deux groupes géochimiques :
  - oxydes de fer (les plus courants) ;
    - magnétite, hématite...
  - sulfures de fer ;
    - pyrrhotite.

Susceptibilité



Susceptibilité

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Dolomite	0 – 0.0009	0.0001
Calcaire	0 – 0.003	0.0003
Grès	0 – 0.02	0.0004
Schiste argileux	0.00001 – 0.015	0.0006
Amphibolite		0.0007
Schiste	0.0003 – 0.003	0.0014
Phyllite		0.0015
Gneiss	0.0001 – 0.025	
Quartzite		0.004
Sperpentine	0.003 – 0.017	
Ardoise	0 – 0.035	0.006

Valeurs en SI

Susceptibilité

Roche/minéral	**Plage**	**Moyenne**
Granite	0 – 0.05	0.0025
Rhyolite	0.0002 – 0.035	
Dolorite	0.001 – 0.035	0.017
Augite-syenite	0.03 – 0.04	
Olivine		0.025
Diabase	0.001 – 0.16	0.055
Porphyre	0.0003 – 0.2	0.060
Gabbro	0.001 – 0.09	0.07
Basaltes	0.0002 – 0.175	0.07
Diorite	0.0006 – 0.12	0.085
Pyroxénite		0.125
Péridotite	0.09 – 0.2	0.15
Andésite		0.16

Valeurs en SI

Susceptibilité

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Graphite		1×10^{-4}
Quartz		-1×10^{-5}
Anhydrite, gypse		-1×10^{-5}
Calcite	-1×10^{-6} – -1×10^{-5}	
Charbon		2×10^{-5}
Argiles		2×10^{-4}
Chalcopyrite		4×10^{-4}
Sphalérite		7×10^{-4}
Cassitérite		9×10^{-4}
Sidérite	1×10^{-3} – 4×10^{-3}	
Pyrite	5×10^{-5} – 5×10^{-3}	1.5×10^{-3}
Limonite		2.5×10^{-3}
Arsénopyrite		3×10^{-3}

Valeurs en SI

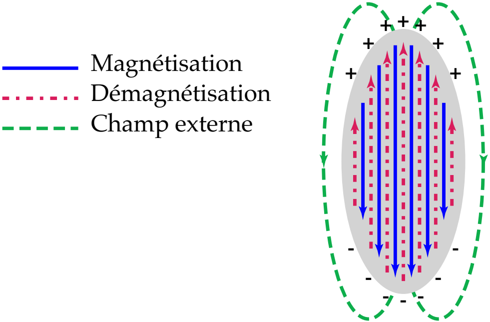
Susceptibilité

Roche/minéral	Plage	Moyenne
Hématite	5×10^{-5} – 0.035	6.5×10^{-3}
Chromite	0.003 – 0.11	7×10^{-3}
Franklinite		0.43
Pyrrhotite	0.001 – 6.0	1.5
Ilménite	0.3 – 3.5	1.8
Magnétite	1.2 – 19.2	6.0

Valeurs en SI

Cause de la démagnétisation

- Un objet magnétique placé dans un champ **H** ambiant aura des «pôles» aux extrémités ;



- Ces pôles génèrent un champ de démagnétisation interne $\mathbf{H}_d$.

Observations

- Plus les pôles sont rapprochés, plus $\mathbf{H}_d$ est élevé ;
- Le champ $\mathbf{H}_d$ a pour effet de réduire l'effet de $\mathbf{H}$ sur la magnétisation du corps ;
- Le champ $\mathbf{H}_d$ est proportionnel à $\mathbf{M}$;
- Le facteur de démagnétisation N est la constante de proportionnalité

$$\mathbf{H}_d = N\mathbf{M}. \tag{113}$$

Susceptibilité apparente

- Le champ interne, dans l'objet, est

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} - \mathbf{H}_d = \mathbf{H} - N\mathbf{M};$$

- La susceptibilité apparente k_a se distingue de la susceptibilité intrinsèque k en raison du facteur de démagnétisation :

$$k = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}_i};$$

$$k_a = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}};$$

$$\mathbf{M} = k\mathbf{H}_i = k_a \left(\mathbf{H}_i + Nk\mathbf{H}_i\right);$$

$$k_a = \frac{k}{1 + Nk}. \tag{114}$$

Le facteur de démagnétisation

- Le facteur N dépend de la forme du corps ;
- Règle générale : $N_x + N_y + N_z = 1$;
- Pour une sphère : $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$;
- Pour une tige infinie :
  - Perpendiculaire à l'axe : $N_\perp = \frac{1}{2}$;
  - Parallèle à l'axe : $N_\parallel = 0$;
- Pour une feuille mince infinie :
  - Perpendiculaire au plan : $N_\perp = 1$;
  - Parallèle au plan : $N_\parallel = 0$;
- On observe donc une anisotropie pour les corps ayant une dimension plus petite que les autres, causée par la démagnétisation ;
  - cette anisotropie provoque une déviation de la magnétisation $\mathbf{M}$ par rapport au champ $\mathbf{H}$.

Influence effective

- La démagnétisation produit un effet notable si $k > 0.01$;
- En général, significatif pour
  - pyrrhotite massive ;
  - roche avec plus de 5-10% de magnétite.
- Pour un corps donné, le facteur N est constant si la magnétisation est uniforme.